DINAMIKA ROBOTA

Poznavanje dinamike manipulatora je neophodno za:

– projektovanje konstrukcije robota
– dimenzionisanje pogona zglobova
– modeliranje i simuliranje robota
– projektovanje sistema upravljanja (analiza i sinteza)

Dinamika robotaje od svih teorijskih aspekata robotike poslednja našla praktičnu primjenu. Zato ćemo na početku iznijeti određena obrazloženja i argumente u prilog njene primjene.

Krenimo od činjenice da se uspješno projektovanje i upravljenje nekog sistema ne može izvesti bez njegovog dobrog poznavanja. Ovo je, svakako tačno, ali pod pojmom " dobrog poznavanja" ne podrazumijeva se uvijek isto. Razmatrajmo problem mehaničkog sistema - konkretno jednog robota. Dobro poznavanje takvog sistema može, a ne mora uključivati poznavanje matematickog modela njegove dinamike (tzv. dinamičkog modela). U ranijim fazama razvoja robotike projektovanje robota nije uključivalo tačan proračun dinamike, a upravljanje nije vodilo računa o mnogim dinanamičkim efektima već se, uz određene aproksimacije, svodilo na poznatu teoriju automatskog upravljanja. Ovakav pristup bio je posledica nerazvijene teorije robotike. Naime, dugo vremena praksa proizvodnje i primjene robota razvijala se nezavisno od teorije koja je bila često isuviše akademski orijentisana. Ovakvo stanje ipak nije spriječilo neke proizvođače da naprave veoma uspješne robotske uređaje.

U današnje vrijeme, međutim, zahtjevi za složenim i vrlo brzim robotskim sistemima diktirali su povezivanje teorije i prakse. Sa stanovišta primjene dinamike robota ključnu ulogu je odigrao razvoj efikasnih metoda za proračun dinamike uz pomoć racunara. Uz niz kasnije razradenih metoda, dinamički model i na njemu zasnovani proračuni i simulacija, postao je nezaobilazni dio svakog uspješnog projektovanja robota.

Savremena tehnologija postavlja sve strožije zahtjeve u pogledu veće preciznosti, pouzdanosti i brzine rada proizvodnih sistema uopšte, što je posebno izraženo kada je riječ o robotskim sistemima. Veoma složeni zahtjevi u pogledu projektovanja robota, kao što su promjenljivost njegove geometrije, režima rada i opterećenja, optimizacija vremena kretanja i potrošnje pogonske energije itd, doveli su do potrebe sagledavanja kompleksne dinamike robota. Ovi zahtjevi su doprinijeli da dinamika robota postane jedna od najznačajnijih oblasti istraživanja u robotici. Već i sama promjenljiva geometrija robota doprinosi priličnom usložnjavanju njegovog dinamičkog modela. Pri tome treba imati u vidu da u dinamici sistema često veći problem predstavlja promjenljiva geometrija sistema čak i pri jednostavnom obliku kretanja, nego najkomplikovaniji zakoni kretanja geometrijski nepromjenljivog sistema u toku vremena.

Izučavanje dinamike robota se svodi na rješavanje dva problema. U prvom slučaju radi se o **direktnom problemu dinamike**, što podrazumjeva određivanje pogonskog opterećenja (sila/momenata) aktuatora koji izazivaju zadato kretanje sistema robota, odnosno segmenata i njegovog završnog uređaja (hvataljke), pri čemu se polazi od poznatih unutrašnjih koordinata robota. Unutrašnje koordinate je potrebno dobiti polazeći od zahtjevanih spoljašnjih koordinata, a što je vezano za inverzni problem kinematike robota. Rješavanjem direktnog problema dinamike se ujedno rješava problem upravljanja.

Kod **inverznog problema dinamike** polazi se od poznatih sila/momenata, a određuju se zakoni kretanja koje će one izazvati, što je vezano za problem simulacije. U tom slučaju se dobijaju kinematičke veličine kretanja u lokalnim koordinatama, pri čemu je korišćenjem direktnog problemu kinematike potrebno te koordinate preračunati u globalne koordinate.

U oba slučaja je moguće određivanje i nekih drugih mehaničkih veličina, kao što su unutrašnje sile u zglobovima robota, deformacije, naprezanja itd.

Inverzni problem dinamike je složeniji, jer pri tome veliku poteškoću predstavlja rješavanje obimnih nelinearnih diferencijalnih jednačina kretanja koje su transcedentnog karaktera, pri čemu su one spregnute kako po unutrašnjim koordinatama robota, tako i po karakteristikama brzina i ubrzanja robotskog sistema. Direktni dinamički problem je moguće riješiti analitičkim načinom, dok je inverzni problem, zbog pomenutog karaktera diferencijalnih jednačina kretanja, moguće riješiti jedino numeričkim metodama.

Sa gledišta dinamike, značajno je i pitanje izbora tipa aktuatora, kao pokretača robota, zatim prenosnika snage, njihova veza sa segmentima robota, kao i pitanje pogonske energije. Problem pogonske energije je bitan pogotovu kada se zna da su roboti u prosjeku veći potrošači energije nego njima slične konvencionalne mašine.

S obzirom na način formiranja dinamičkih jednačina robota, postupci njihovog formiranja se mogu podijeliti na ručne i automatske.

Ručni način formiranja jednačina dinamičkog modela robota podrazumijeva korišćenje klasičnog postupka uz upotrebu olovke i papira, nekom odabranom metodom. Kao rezultat toga dobiju se određene jednačine koje daju vezu između pogonskih opterećenja robota i karakteristika kretanja. Ovaj način formiranja jednačina podrazumijeva veliku koncentraciju, a ponekad i potrebu za više puta ponovljenom kontrolom postupka. Zbog toga je on pogodniji u slučajevima kada robot ima manje stepeni slobode kretanja, dok je za veći broj stepeni slobode kretanja prilično mukotrpan.

Automatski način formiranja dinamičkih jednačina kretanja robota je usavršen u novije vrijeme zahvaljujući naglom razvoju računarske tehnike. Veoma je pogodan za robote sa više stepeni slobode kretanja. Pri tom računar nekom odabranom metodom sam automatski formira dinamičke jednačine. Ovaj postupak je zasnovan na korišćenju rekurzivnih kinematičkih i dinamičkih jednačina. Dobijeni rezultati su u numeričkom obliku. Nedostatak ovog metoda je u složenosti strukture ovog načina modeliranja. Isto tako, usljed numeričkog oblika dobijenih rezultata, ne može se u dovoljnoj mjeri napraviti analiza uticaja pojedinih parametara na krajni rezultat.

S obzirom na zakone mehanike koji se koriste pri formiranju jednačina kretanja, metode njihovog formiranja mogu da budu:

- metoda na bazi Newton-Eulerovih zakona,
- metoda na bazi Lagrangeovih jednačina,
- metoda na bazi Appelovih jednačina.

Uglavnom se koriste prve dvije metode i one će ovdje biti prikazane.

Newton-Eulerova metoda koristi rekurzivne kinematičke i dinamičke relacije, pri čemu u jednačinama figurišu kako pogonska opterećenja robota, tako i zakoni kretanja kao i unutrašnje reakcije u zglobovima.

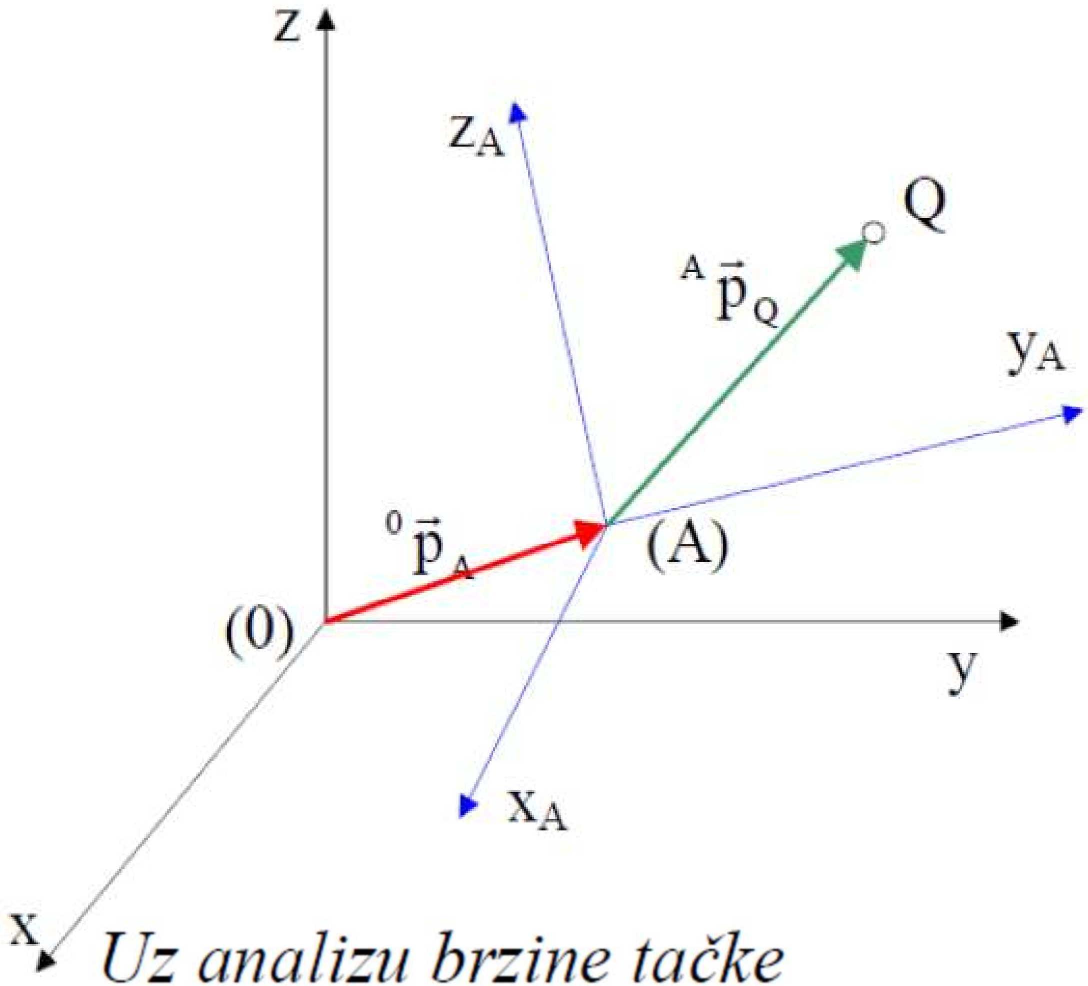
Lagrangeova metoda je ustvari energetska metoda i njenim korišćenjem u dobijenim jednačinama figurišu pogonska opterećenja robota, kao i zakoni kretanja.

Prednost prve metode nad drugom je što se njenim korišćenjem mogu odrediti i nepoznate dinamičke reakcije u zglobovima robota, a nedostatak je što se ne može izbjeći određivanje tih veličina čak i u slučaju kada se one ne traže kao nepoznati parametri.

Kinematičke relacije potrebne za primjenu Newton-Eulerove i Lagrangeove Metode

Ovdje će biti prikazano izvođenje kinematičkih matričnih izraza, na osnovu kojih se mogu naći rekurzivne relacije potrebne za primjenu Newton-Eulerove kao i relacije potrebne za primjenu Lagrangeove metode. Kada su u pitanju kinematičke relacije za primjenu prve metode, kao što će se vidjeti, potrebno je koristiti izraze za ugaonu brzinu i ugaono ubrzanje segmeta, za ubrzanje koordinatnog sistema segmenta, kao i ubrzanje njegovog centra inercije. Za primjenu druge metode potrebno je poznavati brzinske karakteristike pojedinih segmenata. Prvo će se pomenute kinematičke veličine izraziti u nepomičnom koordinatnom sistemu (0).

BRZINA TAČKE



Uz analizu brzine tačke

Neka je (0) nepomični koordinatni sistem, a (A) pomični sistem u odnosu na koji se relativno kreće tačka Q (sl. 5.1.). Ako je ${}^{A}\{{}^{A}p_Q\}$ relativni radijus vektor tačke Q u odnosu na sistem (A), prikazan u tom sistemu, tada je radijus vektor tačke Q u odnosu na sistem (0), prikazan u tom sistemu:

$$ {}^{0}\{{}^{0}p_Q\} = {}^{0}\{{}^{0}p_A\} + {}^{0}\{{}^{A}p_Q\} = {}^{0}\{{}^{0}p_A\} + {}^{0}_{A}[R] \cdot {}^{A}\{{}^{A}p_Q\}, \tag{5.1} $$

gdje je:

${}^{0}\{{}^{0}p_A\}$ - relativni radijus vektor ishodišta sistema (A), u odnosu na ishodište sistema (0), prikazan u tom sistemu,

${}^{0}_{A}[R]$ - matrica rotacije koordinatnog sistema (A) u odnosu na nepomični koordinatni sistem (0), Apsolutna brzina tačke Q, prikazana u nepomičnom sistemu, prema teoremi slaganja brzina za složeno kretanje tačke, je

$$^{0}\{v_Q\} = {}^{0}\{v_A\} + {}^{0}\{\omega_A\} \times {}^{0}\{{}^{A}p_Q\} + {}^{0}\{{}^{A}v_Q\}, \tag{5.2}$$

gdje je:

$^{0}\{\omega_A\}$ - vektor ugaone brzine sistema A, prikazan u nepomičnom sistemu.

$^{0}\{{}^{A}v_Q\}$ - vektor relativne brzine tačke Q u odnosu na sistem (A), prikazan u sistemu (0), Izraz (5.2) se može pisati u obliku

$$ {}^{0}\{v_Q\} = {}^{0}\{v_A\} + {}^{0}\{\omega_A\} \times \left({}^{0}_{A}[R] \cdot {}^{A}\{{}^{A}p_Q\} \right) + {}^{0}_{A}[R] \cdot {}^{A}\{{}^{A}v_Q\}. \tag{5.3} $$

S druge strane, vektor brzine tačke Q se može dobiti i direktnim diferenciranjem izraza (5.1) po vremenu

$$ {}^{0}\{v_Q\} = \frac{d}{dt}\left({}^{0}\{{}^{0}p_A\} \right) + \frac{d}{dt}\left({}^{0}_{A}[R] \cdot {}^{A}\{{}^{A}p_Q\} \right) = {}^{0}\{v_A\} + \frac{d}{dt}\left({}^{0}_{A}[R] \cdot {}^{A}\{{}^{A}p_Q\} \right). \tag{5.4} $$

Upoređivanjem izraza (5.3) i (5.4) dobija se izvod po vremenu umnoška matrice rotacije ${}^{0}_{A}[R]$ i relativnog radijus vektora tačke Q u odnosu na sistem (A), prikazanog u tom sistemu

$$ \frac{d}{dt}\left({}^{0}_{A}[R] \cdot {}^{A}\{{}^{A}p_Q\} \right) = {}^{0}\{\omega_A\} \times \left({}^{0}_{A}[R] \cdot {}^{A}\{{}^{A}p_Q\} \right) + {}^{0}_{A}[R] \cdot {}^{A}\{{}^{A}v_Q\}. \tag{5.5} $$

Ova relacija je od bitnog značaja, zbog toga što se može iskoristiti kada je u pitanju izvod po vremenu proizvoda matrice rotacije proizvoljnog pomičnog koordinatnog sistema u odnosu na nepomični sistem (0) i bilo kojeg relativnog vektora u odnosu na pomični sistem, prikazanog u tom sistemu.

Ukoliko tačka Q ima konstantan položaj u odnosu na sistem (A), tada je

$$\left\{{}^{A}v_{Q}\right\}=0,$$

pa je brzina tačke Q

$$^{0}\left\{v_{Q}\right\}={}^{0}\left\{v_{A}\right\}+{}^{0}\left\{\omega_{A}\right\}\times\left({}^{0}_{A}[R]\cdot{}^{A}\left\{{}^{A}p_{Q}\right\}\right). \tag{5.6}$$

UBRZANJE TAČKE

Diferencirajući izraz (5.3) po vremenu, dobit će se ubrzanje tačke Q prikazano u nepomičnom sistemu, za opšti slučaj kada tačka Q ima promjenljiv položaj u odnosu na pomični koordinatni sistem (A)

$$
\begin{aligned}
{}^{0}\{a_Q\} = {} & \frac{d}{dt}\left({}^{0}\{v_A\}\right) + \frac{d}{dt}\left({}^{0}\{\omega_A\}\right) \times \left({}^{0}_{A}[R] \cdot {}^{A}\{{}^{A}p_Q\}\right) + {}^{0}\{\omega_A\} \times \frac{d}{dt}\left({}^{0}_{A}[R] \cdot {}^{A}\{{}^{A}p_Q\}\right) + \\
& + \frac{d}{dt}\left({}^{0}_{A}[R] \cdot {}^{A}\{{}^{A}v_Q\}\right)
\end{aligned}
\tag{5.7}
$$

U prethodnom izrazu je:

$\frac{d}{dt}\left({}^{0}\{v_A\}\right) = {}^{0}\{a_A\}$ - ubrzanje ishodišta sistema (A) prikazano u nepomičnom sistemu,

$\frac{d}{dt}\left({}^{0}\{\omega_A\}\right) = {}^{0}\{\varepsilon_A\}$ - ugaono ubrzanje sistema (A) prikazano u nepomičnom sistemu.

Analogno izrazu (5.5), izvod po vremenu proizvoda matrice rotacije ${}_{A}^{0}\left[R\right]$ i vektora relativne brzine ${}^{A}\left\{{}^{A}v_{Q}\right\}$ je

$$\frac{d}{dt}\left({}_{A}^{0}[R]\cdot{}^{A}\left\{{}^{A}v_{Q}\right\}\right)={}^{0}\left\{\omega_{A}\right\}\times\left({}_{A}^{0}[R]\cdot{}^{A}\left\{{}^{A}v_{Q}\right\}\right)+{}_{A}^{0}[R]\cdot{}^{A}\left\{{}^{A}a_{Q}\right\}, \tag{5.8}$$

gdje je:

${}^{0}\left\{{}^{A}a_{Q}\right\}$ - vektor relativnog ubrzanja tačke Q u odnosu na sistem (A), prikazan u sistemu (0).

Izraz (5.7) se tada transformiše u oblik

$$
\begin{aligned}
{}^{0}\{a_{Q}\} &= {}^{0}\{a_{A}\} + {}^{0}\{\varepsilon_{A}\} \times \left({}^{0}_{A}[R] \cdot {}^{A}\{{}^{A}p_{Q}\} \right) + {}^{0}\{\omega_{A}\} \times \left[{}^{0}\{\omega_{A}\} \times \left({}^{0}_{A}[R] \cdot {}^{A}\{{}^{A}p_{Q}\} \right) \right] + \\
&\quad + 2 \cdot {}^{0}\{\omega_{A}\} \times \left({}^{0}_{A}[R] \cdot {}^{A}\{{}^{A}v_{Q}\} \right) + {}^{0}_{A}[R] \cdot {}^{A}\{{}^{A}a_{Q}\}.
\end{aligned}
\tag{5.9}
$$

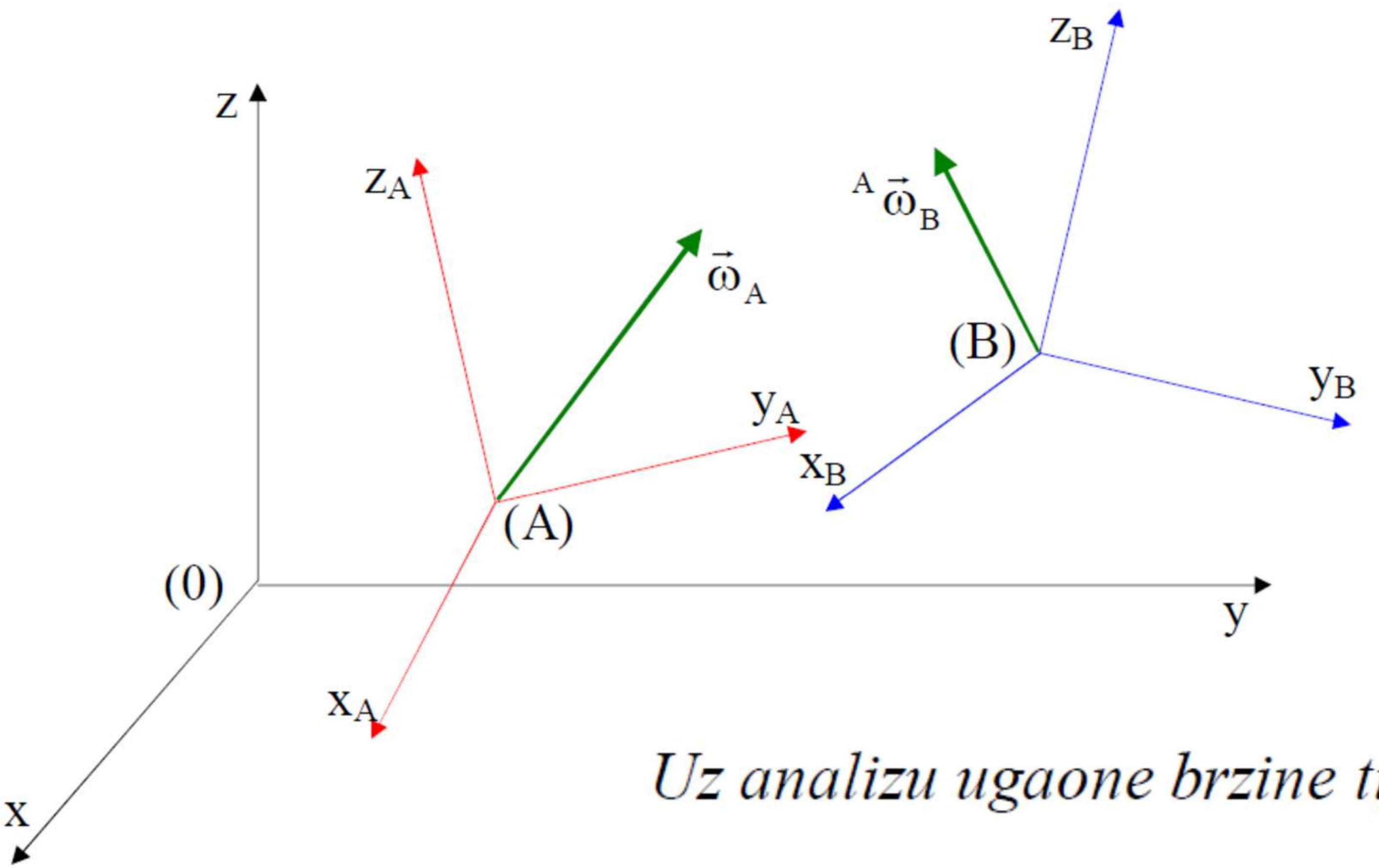
U slučaju kada je vektor $\{{}^{A}p_{Q}\}$ konstantan u sistemu (A), tada je

$$
\{{}^{A}v_{Q}\} = 0, \qquad \{{}^{A}a_{Q}\} = 0,
$$

pa je

$$
{}^{0}\{a_{Q}\} = {}^{0}\{a_{A}\} + {}^{0}\{\varepsilon_{A}\} \times \left({}^{0}_{A}[R] \cdot {}^{A}\{{}^{A}p_{Q}\} \right) + {}^{0}\{\omega_{A}\} \times \left[{}^{0}\{\omega_{A}\} \times \left({}^{0}_{A}[R] \cdot {}^{A}\{{}^{A}p_{Q}\} \right) \right]. \tag{5.10}
$$

Pretpostavimo da koordinatni sistem (A) ima apsolutnu ugaonu brzinu $\{\omega_A\}$, a da koordinatni sistem (B) ima relativnu ugaonu brzinu $\{{}^A\omega_B\}$ u odnosu na sistem (A) (sl. 5.2.). Tada je apsolutna ugaona brzina sistema (B) prikazana u nepomičnom sistemu (0)



Uz analizu ugaone brzine tijela

$$ {}^{0}\{\omega_{B}\} = {}^{0}\{\omega_{A}\} + {}^{0}\{{}^{A}\omega_{B}\}, \tag{5.11} $$

odnosno

$$ {}^{0}\{\omega_{B}\} = {}^{0}\{\omega_{A}\} + {}^{0}_{A}[R] \cdot {}^{A}\{{}^{A}\omega_{B}\}. \tag{5.12} $$

Ukoliko se izraz (5.12) diferencira po vremenu, dobit će se ugaono ubrzanje sistema (B) prikazano u sistemu (0)

$$ {}^{0}\{\varepsilon_{B}\} = \frac{d}{dt}\left({}^{0}\{\omega_{B}\}\right) = \frac{d}{dt}\left({}^{0}\{\omega_{A}\}\right) + \frac{d}{dt}\left({}^{0}_{A}[R] \cdot {}^{A}\{{}^{A}\omega_{B}\}\right). \tag{5.13} $$

Prvi član sa desne strane izraza (5.13) predstavlja ugaono ubrzanje sistema (A), prikazano u sistemu (0)

$$\frac{d}{dt}\left({}^{0}\{\omega_A\}\right)={}^{0}\{\varepsilon_A\},$$

a drugi član, analogno izrazu (5.5), je

$$\frac{d}{dt}\left({}_{A}^{0}[R]\cdot{}^{A}\{{}^{A}\omega_B\}\right)={}^{0}\{\omega_A\}\times\left({}_{A}^{0}[R]\cdot{}^{A}\{{}^{A}\omega_B\}\right)+{}_{A}^{0}[R]\cdot{}^{A}\{{}^{A}\varepsilon_B\}, \tag{5.14}$$

gdje je :

${}^{A}\{{}^{A}\varepsilon_B\}$- relativno ugaono ubrzanje sistema (B) u odnosu na sistem (A), prikazano u tom sistemu.

Prema tome slijedi

$$^{0}\{\varepsilon_{B}\} = {}^{0}\{\varepsilon_{A}\} + {}^{0}\{\omega_{A}\} \times \left({}^{0}_{A}[R] \cdot {}^{A}\{{}^{A}\omega_{B}\} \right) + {}^{0}_{A}[R] \cdot {}^{A}\{{}^{A}\varepsilon_{B}\}. \tag{5.15}$$

Na osnovu dobijenih izraza: (5.3), (5.6), (5.9), (5.10), (5.12) i (5.15) mogu se dobiti relacije za kinematičke karakteristike robotskog segmenta, kao funkcije pojedinih parametara istog segmenta i parametara susjednog segmenta.

Newton-Eulerova metoda

Newton-Eulerova metoda (Newton-Eulerov iteracioni dinamički algoritam) sastoji se iz dva dijela: spoljašnje i unutrašnje iteracije.

U spoljašnjoj iteraciji se, idući od baznog ka izvršnom segmentu robota, određuju kinematičke karakteristike pojedinih segmenata: ugaone brzine, ugaona ubrzanja, ubrzanja koordinatnih sistema vezanih za segment i ubrzanja njihovih centara inercije, kao i dinamičke karakteristike: glavni vektori sila koje djeluju na segmente, glavni momenti sila u odnosu na njihove centre inercije kao pol.

U okviru unutrašnje iteracije se, idući od izvršnog ka baznom segmentu robota, određuju sile i momenti međusobnog djelovanja susjednih segmenata u njihovim zglobovima, kao i sile/momenti aktuatora segmenta robota.

Pomenute veličine je potrebno izraziti u matričnom obliku, u koordinatnim sistemima posmatranih segmenata. U tom cilju koristit će se već dobijeni izrazi.

SPOLJAŠNA ITERACIJA

UGAONA BRZINA SEGMENTA

Ako su i-ti i (i+1)-ti članak robota međusobno vezani rotacionim zglobom (i+1), tada će na osnovu izraza (5.12) ugaona brzina članka (i+1), prikazana u nepomičnom koordinatnom sistemu biti

$$^{0}\{\omega_{i+1}\} = {}^{0}\{\omega_{i}\} + {}^{0}_{i}[R] \cdot {}^{i}\{{}^{i}\omega_{i+1}\}, \tag{5.16}$$

gdje je:

$^{i}\{{}^{i}\omega_{i+1}\}$ - relativna ugaona brzina članka (i+1) u odnosu na sistem (i), prikazana u tom koordinatnom sistemu.

Ugaona brzina članka (i+1) prikazana u njegovom koordinatnom sistemu dobit će se ako se izraz (5.16) pomnoži sa lijeve strane matricom rotacije ${}^{i+1}_{0}[R]$:

$$ {}^{i+1}\{\omega_{i+1}\} = {}^{i+1}_{0}[R] \cdot {}^{0}\{\omega_{i+1}\} = {}^{i+1}_{0}[R] \cdot {}^{0}\{\omega_{i}\} + {}^{i+1}_{0}[R] \cdot {}^{0}_{i}[R] \cdot {}^{i}\{{}^{i}\omega_{i+1}\} = $$

$$ = {}^{i+1}\{\omega_{i}\} + {}^{i+1}_{i}[R] \cdot {}^{i}\{{}^{i}\omega_{i+1}\} = {}^{i+1}_{i}[R] \cdot {}^{i}\{\omega_{i}\} + {}^{i+1}\{{}^{i}\omega_{i+1}\}. \tag{5.17} $$

Posljednji član u prethodnom izrazu se može napisati u obliku

$$ {}^{i+1}\{{}^{i}\omega_{i+1}\} = \dot{\theta}_{i+1} \cdot {}^{i+1}\{\hat{z}_{i+1}\} \tag{5.18} $$

gdje je :

$\dot{\theta}_{i+1}$ - projekcija zglobne ugaone brzine članka (i+1) u odnosu na članak (i) na osu rotacije z_{i+1},

${}^{i+1}\{\hat{z}_{i+1}\} = (0 \quad 1 \quad 0)^{T}$ - jedinični vektor zglobne ose članka (i+1), prikazan u sistemu tog članka.

Prema tome je

$$ {}^{i+1}\{\omega_{i+1}\} = {}^{i+1}_{i}[R] \cdot {}^{i}\{\omega_i\} + \dot{\theta}_{i+1} \cdot {}^{i+1}\{\hat{z}_{i+1}\}. \tag{5.19} $$

Za slučaj kada je (i+1)-ti zglob robota translatoran (prizmatičan), relativna ugaona brzina članka (i+1) u odnosu na prethodni članak (zglobna ugaona brzina) jednaka je nuli

$$ \dot{\theta}_{i+1} = 0, $$

pa je ugaona brzina tog članka

$$ {}^{i+1}\{\omega_{i+1}\} = {}^{i+1}_{i}[R] \cdot {}^{i}\{\omega_i\}. \tag{5.20} $$

b) *Ugaono ubrzanje članka*

Ako su i-ti i (i+1)-ti članak robota međusobno vezani rotacionim zglobom (i+1), tada će na osnovu izraza (5.15) ugaono ubrzanje članka (i+1) prikazano u nepomičnom koordinatnom sistemu biti

$$ {}^{0}\{\varepsilon_{i+1}\} = {}^{0}\{\varepsilon_{i}\} + {}^{0}\{\omega_{i}\} \times \left({}^{0}_{i}[R] \cdot {}^{i}\{{}^{i}\omega_{i+1}\} \right) + {}^{0}_{i}[R] \cdot {}^{i}\{{}^{i}\varepsilon_{i+1}\}, \qquad (5.21) $$

gdje je:

${}^{i}\{{}^{i}\varepsilon_{i+1}\}$ - relativno ugaono ubrzanje članka (i+1) u odnosu na sistem (i), prikazano u tom koordinatnom sistemu.

Slično kao u prethodnom slučaju, ugaono ubrzanje članka (i+1) prikazano u njegovom koordinatnom sistemu dobit će se ako se izraz (5.21) pomnoži sa lijeve strane matricom rotacije ${}^{i+1}_{0}[R]$:

$$ {}^{i+1}\{\varepsilon_{i+1}\} = {}^{i+1}_{0}[R]\cdot{}^{0}\{\varepsilon_{i+1}\} = {}^{i+1}_{0}[R]\cdot{}^{0}\{\varepsilon_{i}\} + \left({}^{i+1}_{0}[R]\cdot{}^{0}\{\omega_{i}\}\right) \times \left({}^{i+1}_{0}[R]\cdot{}^{0}_{i}[R]\cdot{}^{i}\{{}^{i}\omega_{i+1}\}\right) + $$

$$ + {}^{i+1}_{0}[R]\cdot{}^{0}_{i}[R]\cdot{}^{i}\{{}^{i}\varepsilon_{i+1}\} = {}^{i+1}\{\varepsilon_{i}\} + {}^{i+1}\{\omega_{i}\} \times \left({}^{i+1}_{i}[R]\cdot\{{}^{i}\omega_{i+1}\}\right) + {}^{i+1}_{i}[R]\cdot{}^{i}\{{}^{i}\varepsilon_{i+1}\} = $$

$$ = {}^{i+1}_{i}[R]\cdot{}^{i}\{\varepsilon_{i}\} + \left({}^{i+1}_{i}[R]\cdot{}^{i}\{\omega_{i}\}\right) \times {}^{i+1}\{{}^{i}\omega_{i+1}\} + {}^{i+1}\{{}^{i}\varepsilon_{i+1}\}. \tag{5.22} $$

Pošto je

$$ {}^{i+1}\{{}^{i}\overline{\varepsilon}_{i+1}\} = \ddot{\theta}_{i+1}\cdot{}^{i+1}\{\hat{z}_{i+1}\}, $$

gdje je : $\ddot{\theta}_{i+1}$ - projekcija zglobnog ugaonog ubrzanja članka (i+1) u odnosu na i- ti članak, na osu rotacije z_{i+1},

tada se dobija:

$$ {}^{i+1}\{\varepsilon_{i+1}\} = {}^{i+1}_{i}[R]\cdot{}^{i}\{\varepsilon_{i}\} + \dot{\theta}_{i+1}\left({}^{i+1}_{i}[R]\cdot{}^{i}\{\omega_{i}\}\right) \times {}^{i+1}\{\hat{z}_{i+1}\} + \ddot{\theta}_{i+1}\cdot{}^{i+1}\{\hat{z}_{i+1}\}. \tag{5.23} $$

Za slučaj kada je (i+1)-ti zglob robota translatoran (prizmatičan), tada je i relativno ugaono ubrzanje članka (i+1) u odnosu na prethodni članak (zglobno ugaono ubrzanje) jednako nuli

$$\ddot{\theta}_{i+1} = 0 ,$$

pa je ugaono ubrzanje tog članka

$$^{i+1}\{\varepsilon_{i+1}\} = {}^{i+1}_{i}[R] \cdot {}^{i}\{\varepsilon_{i}\} . \tag{5.24}$$

UBRZANJE KORDINATNOG POČETKA SISTEMA VEZANOG ZA SEGMENT

Ako su i-ti i (i+1)-ti članak robota međusobno vezani rotacionim zglobom (i+1), tada će na osnovu izraza (5.10) ubrzanje ishodišta članka (i+1), prikazano u nepomičnom koordinatnom sistemu biti

$$^{0}\{a_{i+1}\} = {}^{0}\{a_i\} + {}^{0}\{\varepsilon_i\} \times \left({}^{0}_{i}[R] \cdot {}^{i}\{{}^{i}p_{i+1}\}\right) + {}^{0}\{\omega_i\} \times \left[{}^{0}\{\omega_i\} \times \left({}^{0}_{i}[R] \cdot {}^{i}\{{}^{i}p_{i+1}\}\right)\right], \qquad (5.25)$$

gdje je :

$^{0}\{a_i\}$ - ubrzanje ishodišta koordinatnog sistema (i) izraženo u nepomičnom koordinatnom sistemu,

$^{i}\{{}^{i}p_{i+1}\}$ - relativni radijus vektor ishodišta sistema (i+1) u odnosu na koordinatni sistem (i), izražen u tom sistemu.

Množeći izraz (5.25) matricom rotacije ${}^{i+1}_{0}[R]$ dobija se ubrzanje ishodišta koordinatnog sistema (i+1) prikazano u istom sistemu

$$
\begin{aligned}
{}^{i+1}\{a_{i+1}\} &= {}^{i+1}_{i}[R]\cdot {}^{0}\{a_{i+1}\} = {}^{i+1}\{a_{i}\} + {}^{i+1}\{\varepsilon_{i}\} \times \left({}^{i+1}_{i}[R]\cdot {}^{i}\{{}^{i}p_{i+1}\}\right) + {}^{i+1}\{\omega_{i}\} \times \left[{}^{i+1}\{\omega_{i}\} \times \left({}^{i+1}_{i}[R]\cdot {}^{i}\{{}^{i}p_{i+1}\}\right)\right] = \\
&= {}^{i+1}_{i}[R]\cdot {}^{i}\{a_{i}\} + \left({}^{i+1}_{i}[R]\cdot {}^{i}\{\varepsilon_{i}\}\right) \times \left({}^{i+1}_{i}[R]\cdot {}^{i}\{{}^{i}p_{i+1}\}\right) + \\
&+ \left({}^{i+1}_{i}[R]\cdot {}^{i}\{\omega_{i}\}\right) \times \left[\left({}^{i+1}_{i}[R]\cdot {}^{i}\{\omega_{i}\}\right) \times \left({}^{i+1}_{i}[R]\cdot {}^{i}\{{}^{i}p_{i+1}\}\right)\right],
\end{aligned}
$$

odnosno

$$
{}^{i+1}\{a_{i+1}\} = {}^{i+1}_{i}[R]\cdot \left[{}^{i}\{a_{i}\} + {}^{i}\{\varepsilon_{i}\} \times {}^{i}\{{}^{i}p_{i+1}\} + {}^{i}\{\omega_{i}\} \times \left({}^{i}\{\omega_{i}\} \times {}^{i}\{{}^{i}p_{i+1}\}\right)\right]. \tag{5.26}
$$

Ako se radi o translatornom (i+1)-tom zglobu robota, tada je na osnovu izraza (5.9) ubrzanje ishodišta članka (i+1) prikazano u nepomičnom sistemu

$$
\begin{aligned}
{}^{0}\{a_{i+1}\} = {}^{0}\{a_{i}\} + {}^{0}\{\varepsilon_{i}\} \times \left({}^{0}_{i}[R] \cdot {}^{i}\{{}^{i}p_{i+1}\}\right) + {}^{0}\{\omega_{i}\} \times \left[{}^{0}\{\omega_{i}\} \times \left({}^{0}_{i}[R] \cdot {}^{i}\{{}^{i}p_{i+1}\}\right)\right] + \\
+ 2 \cdot {}^{0}\{\omega_{i}\} \times \left({}^{0}_{i}[R] \cdot {}^{i}\{{}^{i}v_{i+1}\}\right) + {}^{0}_{i}[R] \cdot {}^{i}\{{}^{i}a_{i+1}\},
\end{aligned}
\qquad (5.27)
$$

gdje je:

${}^{i}\{{}^{i}v_{i+1}\}$, ${}^{i}\{{}^{i}a_{i+1}\}$ - relativna brzina i relativno ubrzanje ishodišta koordinatnog sistema (i+1)-og translatornog članka u odnosu na članak (i), prikazan u sistemu članka (i).

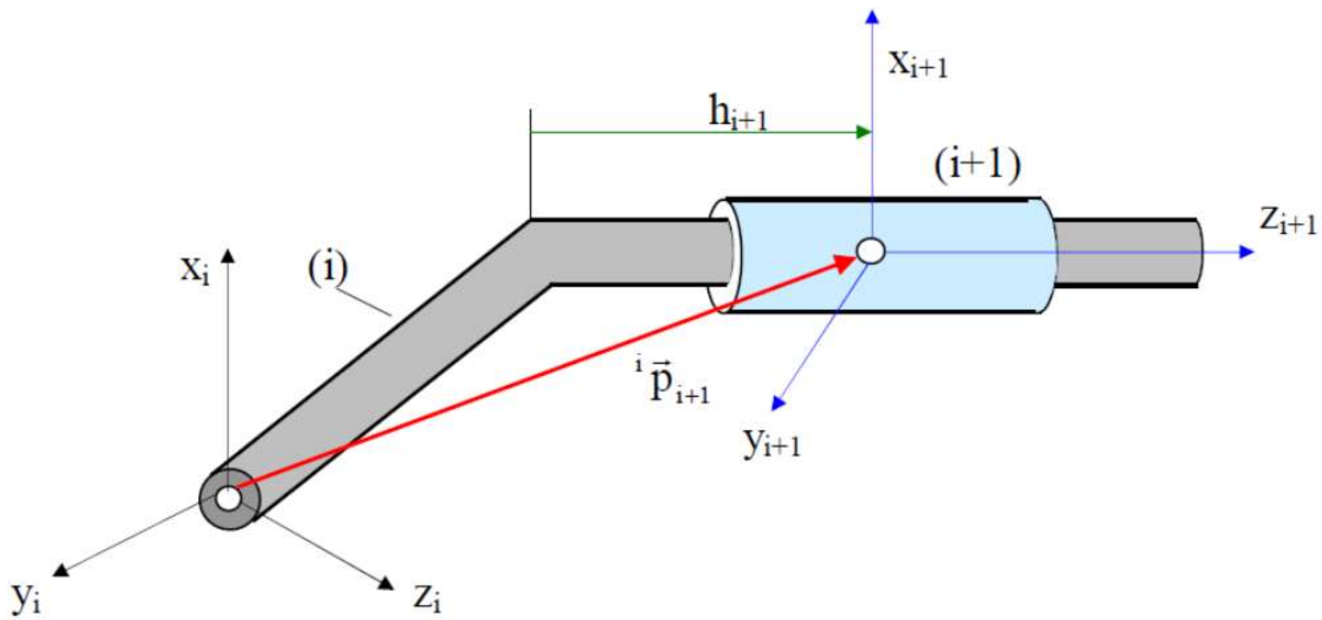
Pomenute relativne veličine prikazane u sistemu (i) će biti (sl.5.3.)

$$^{i}\left\{{}^{i}v_{i+1}\right\} = {}^{i}_{i+1}[R] \cdot {}^{i+1}\left\{{}^{i}v_{i+1}\right\} = {}^{i}_{i+1}[R] \cdot \dot{h}_{i+1} \cdot {}^{i+1}\left\{\hat{z}_{i+1}\right\}, \tag{5.28}$$

$$^{i}\left\{{}^{i}a_{i+1}\right\} = {}^{i}_{i+1}[R] \cdot {}^{i+1}\left\{{}^{i}a_{i+1}\right\} = {}^{i}_{i+1}[R] \cdot \ddot{h}_{i+1} \cdot {}^{i+1}\left\{\hat{z}_{i+1}\right\}, \tag{5.29}$$

gdje je:

h_{i+1} - promjenljiva relativna translatorna koordinata članka (i+1) u odnosu na članak (i).



Ubrzanje ishodišta koordinatnog sistema translatornog (i+1)-og članka prikazano u tom sistemu će biti

$$
{}^{i+1}\{a_{i+1}\} = {}^{i+1}_{0}[R] \cdot {}^{0}\{a_{i+1}\} = {}^{i+1}\{a_i\} + {}^{i+1}\{\varepsilon_i\} \times \left({}^{i+1}_{i}[R] \cdot {}^{i}\{{}^{i}p_{i+1}\} \right) + {}^{i+1}\{\omega_i\} \times \left[{}^{i+1}\{\omega_i\} \times \left({}^{i+1}_{i}[R] \cdot {}^{i}\{{}^{i}p_{i+1}\} \right) \right] +
$$

$$
+ 2 \cdot {}^{i+1}\{\omega_i\} \times \left({}^{i+1}_{i}[R] \cdot {}^{i}_{i+1}[R] \cdot \dot{h}_{i+1} \cdot {}^{i+1}\{\hat{z}_{i+1}\} \right) + {}^{i+1}_{i}[R] \cdot {}^{i}_{i+1}[R] \cdot \ddot{h}_{i+1} \cdot {}^{i+1}\{\hat{z}_{i+1}\}. \tag{5.30}
$$

Transformacijom izraza (5.30), pri čemu treba imati u vidu da za translatorni zglob vrijedi

$$ {}^{i+1}\{\omega_i\} = {}^{i+1}\{\omega_{i+1}\}, $$

dobija se

$$ \begin{aligned} {}^{i+1}\{a_{i+1}\} = {}^{i+1}_{i}[R] \cdot \left[{}^{i}\{a_i\} + {}^{i}\{\varepsilon_i\} \times {}^{i}\{{}^{i}p_{i+1}\} + {}^{i}\{\omega_i\} \times \left({}^{i}\{\omega_i\} \times {}^{i}\{{}^{i}p_{i+1}\} \right) \right] + \\ + 2 \cdot \dot{h}_{i+1} \cdot {}^{i+1}\{\omega_{i+1}\} \times {}^{i+1}\{\hat{z}_{i+1}\} + \ddot{h}_{i+1} \cdot {}^{i+1}\{\hat{z}_{i+1}\}. \end{aligned} \tag{5.31} $$

d) Ubrzanje centra inercije člankа

Na sličan način se dobija ubrzanje centra inercije članka (i+1), bez obzira da li je on rotacioni ili translacioni. Ako se vektor centra inercije članka (i+1) u odnosu na ishodište tog sistema i prikazan u tom sistemu obilježi sa: ${}^{i+1}\{p_{ci+1}\}$, na osnovu izraza (5.10) će ubrzanje centra inercije članka (i+1) u nepomičnom koordinatnom sistemu biti

$$
{}^{0}\{a_{ci+1}\} = {}^{0}\{a_{i+1}\} + {}^{0}\{\varepsilon_{i+1}\} \times \left({}^{0}_{i+1}[R] \cdot {}^{i+1}\{{}^{i+1}p_{ci+1}\}\right) + {}^{0}\{\omega_{i+1}\} \times \left[{}^{0}\{\omega_{i+1}\} \times \left({}^{0}_{i+1}[R] \cdot {}^{i+1}\{{}^{i+1}p_{ci+1}\}\right)\right], \tag{5.32}
$$

a u sistemu (i+1) bit će

$$
{}^{i+1}\{a_{ci+1}\} = {}^{i+1}_{0}[R] \cdot {}^{0}\{a_{ci+1}\}
$$

odnosno

$$
{}^{i+1}\{a_{ci+1}\} = {}^{i+1}\{a_{i+1}\} + {}^{i+1}\{\varepsilon_{i+1}\} \times {}^{i+1}\{{}^{i+1}p_{ci+1}\} + {}^{i+1}\{\omega_{i+1}\} \times \left({}^{i+1}\{\omega_{i+1}\} \times {}^{i+1}\{{}^{i+1}p_{ci+1}\}\right). \tag{5.33}
$$

e) Glavni vektor spoljašnjih sila članka

Glavni vektor spoljašnjih sila koje djeluju na članak (i+1) prikazan u sistemu tog članka, prema zakonu o kretanju centra inercije je

$$^{i+1}\{\Im_{i+1}\} = m_{i+1} \cdot {}^{i+1}\{a_{ci+1}\}, \tag{5.34}$$

gdje je: m_{i+1} – masa članka (i+1)

f) Glavni moment spoljašnjih sila članka

Glavni moment spoljašnjih sila koje djeluju na članak (i+1), za njegov centar inercije kao pol, u sistemu tog članka, je prema Ojlerovim dinamičkim jednačinama

$$^{i+1}\{\aleph_{i+1}\} = {}^{i+1}[J_c] \cdot {}^{i+1}\{\varepsilon_{i+1}\} + {}^{i+1}\{\omega_{i+1}\} \times \left({}^{i+1}[J_c] \cdot {}^{i+1}\{\omega_{i+1}\}\right), \tag{5.35}$$

gdje je:

$^{i+1}[J_c]$ - matrica inercije članka (i+1) za centralne ose tog članka, koje su paralelne osama: x_{i+1}, y_{i+1}, z_{i+1}.

Matrica inercije ima oblik

$$[J_{ci+1}] = \begin{bmatrix} {}^{i+1}J_{cx} & -{}^{i+1}J_{cxy} & -{}^{i+1}J_{cxz} \\ -{}^{i+1}J_{cxy} & {}^{i+1}J_{cy} & -{}^{i+1}J_{cyz} \\ -{}^{i+1}J_{cxz} & -{}^{i+1}J_{cyz} & {}^{i+1}J_{cz} \end{bmatrix}, \tag{5.36}$$

pri čemu su:

${}^{i+1}J_{cx}$, ${}^{i+1}J_{cy}$, ${}^{i+1}J_{cz}$ - aksijalni momenti inercije članka (i+1) za centralne ose paralelne osama sistema (i+1),

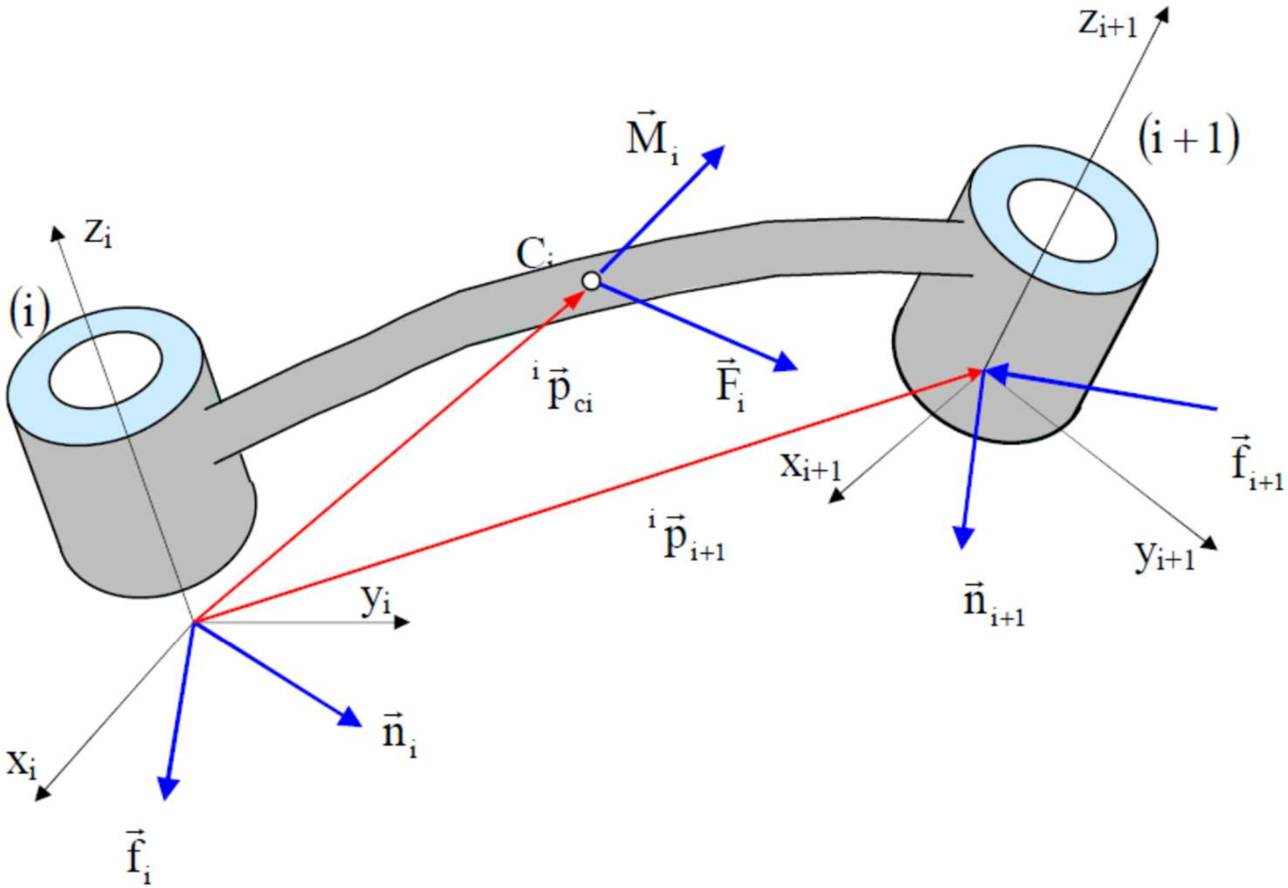
${}^{i+1}J_{cxy}$, ${}^{i+1}J_{cxz}$, ${}^{i+1}J_{cyz}$ - centrifugalni momenti inercije članka za parove centralnih osa paralelnih osama sistema (i+1).

Jednačine (5.19), (5.23), (5.26), (5.33), (5.34), (5.35) predstavljaju jednačine spoljašnje dinamičke iteracije u slučaju rotacionih članaka robota, a jednačine (5.20), (5.24), (5.31), (5.33), (5.34), (5.35) predstavljaju jednačine spoljašnje dinamičke iteracije, u slučaju translatornih članaka robota. Drugim riječima, pomenute jednačine predstavljaju jednačine “propagacije” (član po član) od unutrašnjeg ka krajnjem članku robota.

UNUTRAŠNJE ITERACIJE

a) Sile kojima prethodni članak djeluje na posmatrani članak

Neka i-ti članak robotskog sistema (rotacioni ili translatorni) vrši određeno kretanje pod uticajem sila (sl.5.4).



$\{f_i\}$ - glavni vektor sila kojima članak (i-1) djeluje na članak (i),

$\{n_i\}$ - glavni moment tih sila za ishodište koordinatnog sistema (i) kao pol,

$\{f_{i+1}\}$ - glavni vektor sila kojima članak (i) djeluje na članak (i+1),

$\{n_{i+1}\}$ - glavni moment tih sila za ishodište koordinatnog sistema (i+1) kao pol,

$\{F_i\}$ - glavni vektor svih ostalih realnih sila, koje djeluju na članak (i) a koje nisu posljedica djelovanja između članka (i) i njemu susjednih članaka (gravitacija itd),

$\{M_i\}$ - glavni moment tih sila za centar inercije članka (i) kao pol.

Tada je glavni vektor svih sila koje djeluju na članak (i)

$$ {}^{i}\{\Im_{i}\} = {}^{i}\{f_{i}\} + {}^{i}\{F_{i}\} - {}^{i}\{f_{i+1}\} \tag{5.37} $$

odnosno

$$ {}^{i}\{\Im_{i}\} = {}^{i}\{f_{i}\} + {}^{i}\{F_{i}\} - {}_{i+1}^{\ \ i}[R] \cdot {}^{i+1}\{f_{i+1}\}, \tag{5.38} $$

odakle je glavni vektor sila kojima članak (i-1) djeluje na članak (i)

$$ {}^{i}\{f_{i}\} = {}^{i}\{\Im_{i}\} - {}^{i}\{F_{i}\} + {}_{i+1}^{\ \ i}[R] \cdot {}^{i+1}\{f_{i+1}\}. \tag{5.39} $$

b) Moment sila kojima prethodni članak djeluje na posmatrani članak

Glavni moment svih sila koje djeluju na članak (i) u odnosu na njegov centar inercije kao pol, prikazan u koordinatnom sistemu (i) je (sl.5.4)

$$^{i}\{\aleph_i\} = {}^{i}\{n_i\} + {}^{i}\{M_i\} - {}^{i}\{n_{i+1}\} - {}^{i}\{{}^{i}p_{ci}\} \times {}^{i}\{f_i\} - \left({}^{i}\{{}^{i}p_{i+1}\} - {}^{i}\{{}^{i}p_{ci}\}\right) \times {}^{i}\{f_{i+1}\}. \tag{5.40}$$

Uvrštavajući izraz (5.39) u (5.40) slijedi

$$\begin{aligned}
^{i}\{\aleph_i\} &= {}^{i}\{n_i\} + {}^{i}\{M_i\} - {}_{i+1}^{\;\;i}[R]^{i+1}\{n_{i+1}\} - {}^{i}\{{}^{i}p_{ci}\} \times \left({}^{i}\{\Im_i\} - {}^{i}\{F_i\} + {}_{i+1}^{\;\;i}[R]^{i+1}\{f_{i+1}\}\right) - \\
&- {}^{i}\{{}^{i}p_{i+1}\} \times \left({}_{i+1}^{\;\;i}[R]^{i+1}\{f_{i+1}\}\right) + {}^{i}\{{}^{i}p_{ci}\} \times \left({}_{i+1}^{\;\;i}[R]^{i+1}\{f_{i+1}\}\right) = {}^{i}\{n_i\} + {}^{i}\{M_i\} - {}_{i+1}^{\;\;i}[R]^{i+1}\{n_{i+1}\} - \\
&- {}^{i}\{{}^{i}p_{ci}\} \times {}^{i}\{\Im_i\} + {}^{i}\{{}^{i}p_{ci}\} \times {}^{i}\{F_i\} - {}^{i}\{{}^{i}p_{i+1}\} \times \left({}_{i+1}^{\;\;i}[R]^{i+1}\{f_{i+1}\}\right),
\end{aligned}$$

odakle je vektor ${}^{i}\{n_i\}$

$$
\begin{aligned}
{}^{i}\{n_i\} = {}^{i}\{\aleph_i\} - {}^{i}\{M_i\} + {}_{i+1}^{\;\;i}[R]\cdot{}^{i+1}\{n_{i+1}\} + {}^{i}\left\{{}^{i}p_{ci}\right\} \times {}^{i}\{\Im_i\} - {}^{i}\left\{{}^{i}p_{ci}\right\} \times {}^{i}\{F_i\} + \\
+ {}^{i}\left\{{}^{i}p_{i+1}\right\} \times \left({}_{i+1}^{\;\;i}[R]\cdot{}^{i+1}\{f_{i+1}\}\right).
\end{aligned} \tag{5.41}
$$

c) ***Pogonsko opterećenje aktuatora***

Moment aktuatora u rotacionom zglobu (i) jednak je projekciji momenta kojim članak (i-1) djeluje na članak (i), na osu rotacije z_i, odnosno jednak je skalarnom proizvodu između momenta ${}^{i}\{n_i\}$ i jediničnog vektora ${}^{i}\{\hat{z}_i\}$ ose rotacije članka (i)

$$
M_i^{ak} = {}^{i}\{n_i\}^{T} \cdot {}^{i}\{\hat{z}_i\}. \tag{5.42}
$$

Ukoliko je zglob (i) translatorni, tada je sila aktuatora

$$
F_i^{ak} = {}^{i}\{f_i\}^{T} \cdot {}^{i}\{\hat{z}_i\}. \tag{5.43}
$$

Jednačine (5.39), (5.41), (5.42) predstavljaju jednačine unutrašnje dinamičke iteracije u slučaju rotacionih članaka robota, a jednačine (5.39), (5.41), (5.43) predstavljaju jednačine unutrašnje dinamičke iteracije u slučaju translatornih članaka. Drugim riječima, pomenute jednačine predstavljaju jednačine "propagacije" (član po član) od krajnjeg ka unutrašnjem članku robota.

Primjenom izraza (5.42) odnosno (5.43) za sve aktuatore robota, dobija se sistem jednačina koje povezuju pogonska opterećenja pojedinih aktuatora, zglobne koordinate, zglobne brzine i ubrzanja. Sistem tih jednačina se u matričnom obliku može izraziti kao

$$\{\tau\} = [A(q)]\{\ddot{q}\} + \{B(q,\dot{q})\} + \{C(q)\}, \tag{5.44}$$

gdje je:

$\{\tau\}$ - vektor sila/momenata u aktuatorima robota,
$[A(q)]$ - matrica inercije robota,
$\{\ddot{q}\}$ - vektor generalisanih ubrzanja,
$\{B(q,\dot{q})\}$ - vektor Coriolisovih i centrifugalnih djelovanja,
$\{C(q)\}$ - vektor djelovanja gravitacije.

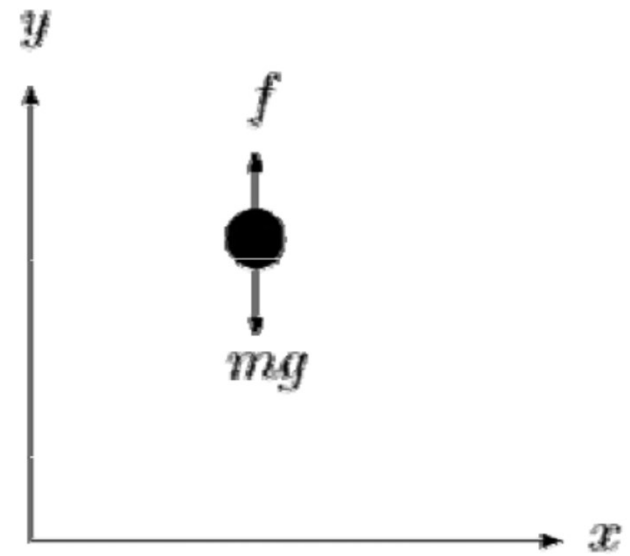
Izraz (5.44) predstavlja ujedno rješenje direktnog problema dinamike robota.

Rješenje inverznog dinamičkog problema se može dobiti jedino numeričkim putem.

LAGRANŽEOVE JEDNAČINE

Posmatrajmo česticu mase m i primijenimo II Njutnov zakon

$$m\ddot{y} = f - mg$$



Definišimo kinetičku i potencijalnu energiju

$$T = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 \qquad U = mgy$$

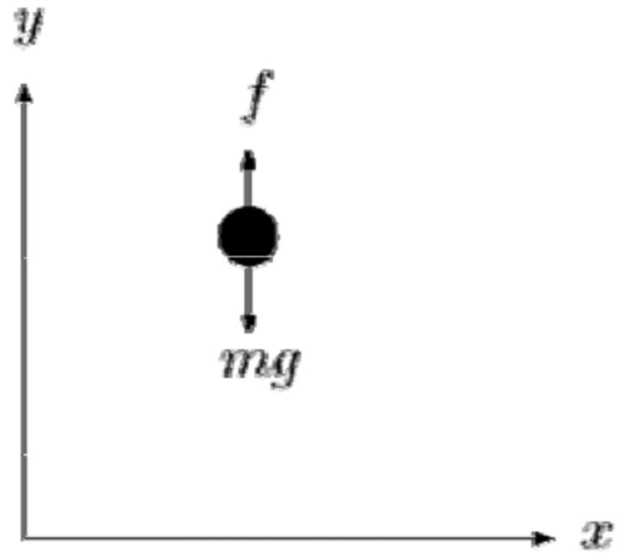
Transformišimo prvu diferencijalnu jednačinu

$$m\ddot{y} = \frac{d}{dt}(m\dot{y}) = \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{y}}\left(\frac{1}{2}m\dot{y}^2\right) = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}$$

$$mg = \frac{\partial}{\partial y}(mgy) = \frac{\partial U}{\partial y}$$

Početna jednačina dobija novi oblik

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = f - \frac{\partial U}{\partial y}$$



Uvedimo sledeću definiciju

$$L = T - U$$

L se naziva Lagranžijan (Lagranžeova funkcija) i sada se jednačina kretanja može napisati u obliku

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = f$$

Drugim riječima da bi odredili jednačinu kretanja ove materijalne tačke treba znati opisati kinetičku i potencijalnu energiju

Lagrangeova metoda pripada grupi energetskih metoda u mehanici i bazirana je na poznavanju kinetičke energije sistema i generalisanih sila. Za određivanje kinetičke energije potrebne su karakteristike brzina elemenata sistema, a generalisane sile se određuju na osnovu samog opterećenja sistema.
Može se postaviti onoliko Lagrangeovih jednačina koliko ima i stepeni slobode kretanja sistema (s)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial K}{\partial q_j}=Q_j, \qquad (j=1,\ldots s) \qquad (5.45)$$

gdje je:

K – kinetička energija sistema,
q_j - j-ta generalisana koordinata,
$\dot{q}_j$ - j-ta generalisana brzina,
Q_j - j-ta generalisana sila.

Kada je u pitanju sistem robota, ukoliko se zanemare otpori kretanja, tada se j-ta generalisana sila sastoji od generalisane sile j-tog aktuatora i generalisane sile usled rada pojedinih težina na pomjeranju po j-toj generalisanoj koordinati

$$Q_j = Q_j^{ak} + Q_j^{mg} . \tag{5.46}$$

Pošto je veličina Q_j^{ak} jednaka ustvari pogonskom opterećenju j-tog aktuatora (sila/moment)

$$Q_j^{ak} = \tau_j^{ak} , \tag{5.47}$$

a s druge strane je Q_j^{mg} jednaka negativnom izvodu potencijalne energije P cijelog sistema u odnosu na neki referentni nivo, po generalisanoj koordinati q_j

$$Q_j^{mg} = -\frac{\partial P}{\partial q_j}, \tag{5.48}$$

tada je na osnovu izraza (5.44)- (5.47) pogonsko opterećenje j-tog aktuatora

$$\tau_j^{ak} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial K}{\partial q_j} + \frac{\partial P}{\partial q_j}. \tag{5.49}$$

Kinetička energija cijelog sistema je

$$K = \frac{1}{2}\int_{(m)} v^2 \cdot dm, \tag{5.50}$$

ili u matričnom obliku

$$K = \frac{1}{2} \int_{(m)} {}^{i}\{v\}^{T} \cdot {}^{i}\{v\} \cdot dm \,, \tag{5.51}$$

gdje je:

${}^{i}\{v\}$ - vektor brzine posmatrane tačke sistema prikazan u i-tom koordinatnom sistemu,

dm - elementarna masa.

Ako je u pitanju robot čije se deformacije mogu zanemariti (model robota sa krutim elementima) tada je kinetička energija nekog njegovog i-tog elementa u opštem slučaju kretanja (pod elementom robota može se podrazumijevati članak, prihvatnica, teret ili bilo koji njegov dio)

$$K_i = \frac{1}{2} m_i \cdot {}^{i}\{v_{ci}\}^{T} \cdot {}^{i}\{v_{ci}\} + \frac{1}{2} \cdot {}^{i}\{\omega_i\}^{T} \cdot {}^{i}[J_c] \cdot {}^{i}\{\omega_i\}, \tag{5.52}$$

gdje je:

m_i - masa i-tog elementa robota,

${}^{i}\{v_{ci}\}$ - vektor brzine centra inercije i-tog elementa robota prikazan u sistemu tog elementa,

${}^{i}\{\omega_i\}$ - vektor ugaone brzine i-tog elementa prikazan u koordinatnom sistemu tog elementa.

Za neke specijalne slučajeve kretanja će izrazi za kinetičku energiju slijediti iz izraza (5.52).

Tako će za slučaj translacije i-tog elementa njegova kinetička energija biti

$$K_i = \frac{1}{2} m_i \cdot {}^i\{v_i\}^T \cdot {}^i\{v_i\}, \tag{5.53}$$

gdje je:

${}^i\{v_i\}$ - vektor brzine bilo koje tačke i-tog elementa robota, pa prema tome i brzine ishodišta i-tog koordinatnog sistema, prikazan u istom koordinatnom sistemu.

Potpuno isti izraz će važiti i u slučaju kada se i-ti element može smatrati materijalnom tačkom, bez obzira kako se on kreće.

Kada je u pitanju rotacija i-tog elementa robota oko stalne ose, tada će u slučaju kada se bilo koja od osa x_i, y_i, z_i poklapa sa osom rotacije, njegova kinetička energija biti

$$K_i = \frac{1}{2} {}^i\{\omega_i\}^T \cdot {}^i[J] \cdot {}^i\{\omega_i\}, \tag{5.54}$$

gdje je:

${}^i[J]$ - matrica inercije i-tog elementa za ose x_i, y_i, z_i.

Ukoliko se ni jedna od osa x_i, y_i, z_i ne poklapa sa stalnom osom rotacije, tada se kinetička energija i-tog elementa može računati direktno na osnovu izraza (5.52).

Ako i-ti element robota vrši sferno kretanje i ako ose x_i, y_i, z_i stalno prolaze kroz neku nepomičnu tačku, tada se kinetička energija tog elementa može računati prema izrazu (5.54), a ako bar jedna od pomenutih osa ne prolazi kroz nepomičnu tačku tada se direktno može koristiti izraz (5.52).

Kada i-ti element vrši ravno kretanje, tada se za određivanje njegove kinetičke energije može koristiti izraz (5.52).

Brzina ishodišta koordinatnog sistema rotacionog članka (i+1) u iterativnom matričnom obliku, izražena u nepomičnom koordinatnom sistemu je prema izrazu (5.6)

$$^{0}\{v_{i+1}\}={}^{0}\{v_{i}\}+{}^{0}\{\omega_{i}\}\times\left({}_{i}^{0}[R]\cdot{}^{i}\{{}^{i}p_{i+1}\}\right). \tag{5.55}$$

Brzina te tačke izražena u koordinatnom sistemu (i+1) će se dobiti ako se izraz (5.55) pomnoži sa lijeve strane matricom rotacije ${}_{0}^{i+1}[R]$

$$^{i+1}\{v_{i+1}\}={}_{i}^{i+1}[R]\cdot{}^{0}\{v_{i+1}\}={}^{i+1}\{v_{i}\}+{}^{i+1}\{\omega_{i}\}\times\left({}_{i}^{i+1}[R]\cdot{}^{i}\{{}^{i}p_{i+1}\}\right),$$

odnosno

$$^{i+1}\{v_{i+1}\}={}_{i}^{i+1}[R]\left({}^{i}\{v_{i}\}+{}^{i}\{\omega_{i}\}\times{}^{i}\{{}^{i}p_{i+1}\}\right). \tag{5.56}$$

Za slučaj translatornog (i+1)-og članka je prema izrazu (5.3)

$$^{0}\{v_{i+1}\} = {}^{0}\{v_{i}\} + {}^{0}\{\omega_{i}\} \times \left({}_{i}^{0}[R] \cdot {}^{i}\{{}^{i}p_{i+1}\}\right) + {}_{i}^{0}[R] \cdot {}^{i}\{{}^{i}v_{i+1}\}. \tag{5.57}$$

Imajući, između ostalog, u vidu izraz (5.28), na osnovu (5.57), u koordinatnom sistemu (i+1) slijedi

$$^{i+1}\{v_{i+1}\} = {}_{0}^{i+1}[R] \cdot {}^{0}\{v_{i+1}\} = {}^{i+1}\{v_{i}\} + {}^{i+1}\{\omega_{i}\} \times \left({}_{i}^{i+1}[R] \cdot {}^{i}\{{}^{i}p_{i+1}\}\right) + \dot{h}_{i+1} \cdot {}^{i+1}\{\hat{z}_{i+1}\},$$

odnosno

$$^{i+1}\{v_{i+1}\} = {}_{i}^{i+1}[R] \cdot \left({}^{i}\{v_{i}\} + {}^{i}\{\omega_{i}\} \times {}^{i}\{{}^{i}p_{i+1}\}\right) + \dot{h}_{i+1} \cdot {}^{i+1}\{\hat{z}_{i+1}\}. \tag{5.58}$$

Takođe je prema izrazu (5.6) brzina centra inercije (i+1)-og rotacionog ili translatornog članka robota prikazana u nepomičnom koordinatnom sistemu

$$ {}^{0}\{v_{ci+1}\} = {}^{0}\{v_{i+1}\} + {}^{0}\{\omega_{i+1}\} \times \left({}_{i+1}^{\;\;0}[R] \cdot {}^{i+1}\{{}^{i+1}p_{ci+1}\} \right), \tag{5.59} $$

a u sistemu (i+1) bit će

$$ {}^{i+1}\{v_{ci+1}\} = {}^{i+1}\{v_{i+1}\} + {}^{i+1}\{\omega_{i+1}\} \times {}^{i+1}\{{}^{i+1}p_{ci+1}\}. \tag{5.60} $$

Potencijalna energija i-tog elementa robota u odnosu na nivo nepomičnog koordinatnog sistema (0) je

$$P_i = -m_i \cdot {}^0\{g\}^T \cdot {}^0\{{}^0p_{ci}\}, \tag{5.61}$$

gdje je :

${}^0\{g\} = (g_{x0} \quad g_{y0} \quad g_{z0})^T$ - vektor ubrzanja Zemljine teže prikazan u nepomičnom koordinatnom sistemu,

${}^0\{{}^0p_{ci}\}$- vektor položaja centra inercije i-tog elementa robota u odnosu na nepomični sistem, prikazan u nepomičnom sistemu.

Kada se za sve aktuatore robota primjeni jednačina (5.49) i u tako dobijene izraze uvrste svi potrebni podaci, dobija se sistem jednačina koji je u matričnom obliku isti kao i u izrazu (5.44)

Kao što je rečeno, primjenom Newton-Eulerove iterativne metode, između ostalog se dobiju jednačine koje povezuju sile/momente pojedinih aktuatora, zglobne koordinate, zglobne brzine i ubrzanja, što se takođe dobija i primjenom Lagrangeove metode. Što se tiče rješenja inverznog dinamičkog problema, odnosno rješenja jednačine (5.44) po generalisanim koordinatama, a što je vezano za dinamičku simulaciju robota, mogu se koristiti različiti numerički algoritmi.

Različiti tipovi zapisa dinamičkih jednačina

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{n}[D_{ij}(q)\ddot{q}_j]}_{\text{1. član}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}[C_{kj}^{i}(q)\dot{q}_k\dot{q}_j]}_{\text{2. član}} + \underbrace{h_i(q)}_{\text{3. član}} + \underbrace{b_i(\dot{q})}_{\text{4. član}} = \underbrace{\tau_i}_{\text{5. član}}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

- 1. član – inercijalne sile i momenti
- 2. član – Coriolisove i centrifugalne sile
- 3. član – utjecaj sile teže na manipulator
- 4. član – trenje
- 5. član – moment aktuatora

Bez obzira na izabrani pristup formiranju dinamičkog modela, kao razultat dobijamo sistem n skalarnih diferencijalnih jednačina drugog reda. Ovaj sistem, odnosno dinamički model može se napisati u obliku

$$\left.\begin{array}{l}
H_{11}(q)\ddot{q}_1 + H_{12}(q)\ddot{q}_2 + \ldots + H_{1n}(q)\ddot{q}_n + h_1(q,\dot{q}) = P_1 \\
H_{21}(q)\ddot{q}_1 + H_{22}(q)\ddot{q}_2 + \ldots + H_{2n}(q)\ddot{q}_n + h_2(q,\dot{q}) = P_2 \\
\vdots \\
H_{n1}(q)\ddot{q}_1 + H_{n2}(q)\ddot{q}_2 + \ldots + H_{nn}(q)\ddot{q}_n + h_n(q,\dot{q}) = P_n
\end{array}\right\}$$

Sistem gornjih jednačina može se napisati i u matričnom obliku

$$P(t) = H(q(t))\ddot{q}(t) + h(q(t),\dot{q}(t))$$

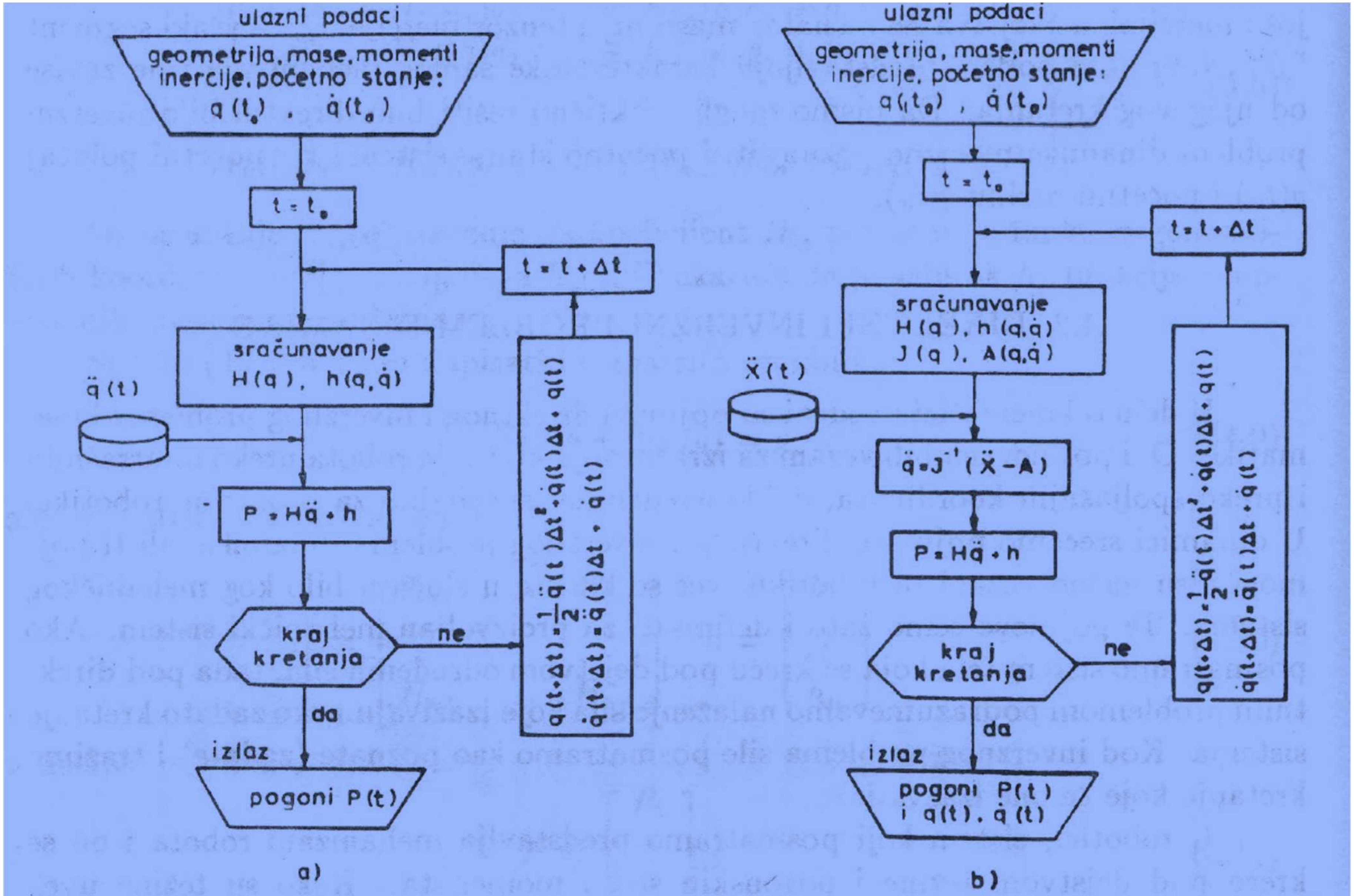
DIREKTNI I INVERZNI PROBLEM DINAMIKE

- U dijelu o kinematici uvedeni su pojmovi direktnog i inverznog problema kinematike. Ovi pojmovi su bili vezanİ za izražavanje kretanja robota preko unutrašnjih i preko spoljašnjih koordinata, dakle uvedeni su specijalno za probleme robotike. U dinamici srećemo pojmove direktnog i inverznog problema dinamike, ali ti pojmovi nijesu nužno vezani za robotiku, već se koriste u slučaju bilo kog mehaničkog sistema. Te pojmove ćemo zato i definisati za proizvoljan mehanički sistem. Ako posmatramo sistem tijela koja se kreću pod dejstvom određenih sila, tada pod direkinim problemom podrazumijevamo nalaženje sila koje izazivaju neko zadato kretanje sistema. Kod inverznog problema sile posmatramo kao poznate (zadate) i tražimo kretanje koje će one izazvati.

- U robotici, sistem koji posmatramo predstavlja mehanizam robota i on se kreće pod dejstvom težine i pogonskih sila i momenata. Kako su težine uvijek poznate, to kada govorimo o zadatim silama ili traženju sila mislimo na sile i momente pogonskih motora, Formulisaćemo problem preciznije. Pod kretanjem robota podrazumijevaćemo promjenu unutrašnjih koordinata, dakle vremensku funkciju q(t). Pod poznatim pogonima podrazumijevaćemo vremensku funkciju P(t). Sada pod direktnim problemom podrazumijevamo nalaženje funkcije P(t) za poznato q(t), a pod inverznim problemima podrazumijevamo nalaženje funkcije q(t) za poznato P (t).
- Razmotrimo rješavanje direktnog problema. Prvo ćemo uočiti osnovnu ideju za proračun. Akoje poznato kretanje q(t), onda možemo reći da su poznati i izvodi, odnosno unutrašnje brzine $\dot{\boldsymbol{q}}$(t) i unutrašnja ubrzanja $\ddot{\boldsymbol{q}}(t)$Tada se pogoni mogu dobiti iz relacije

$$P(t) = H(q(t))\ddot{q}(t) + h(q(t), \dot{q}(t))$$

- Pošto se ova ideja realizuje pomoću računara, to stvari stoje nešto drukačije. Funkcija q(t) nije data analitički vec diskretizovano, odnosno nizom vrijednosti koje odgovaraju nizu trenutaka vremena to, t1 , . ,tk. Neka je interval izmedu pojedinih trenutaka jednak Δt. Kako relacija zahtijeva poznavanje i $\dot{\boldsymbol{q}}$(t) i $\ddot{\boldsymbol{q}}(t)$, to bi bilo neophodno sprovesti numeričko diferenciranje, a to je nepoželjan posao. U dijelu o direktnom i inverznom problemu kinematike pokazali smo da se numeričko diferenciranje može izbjeći tako što ćemo kretanje zadati u obliku početnog stanja $\boldsymbol{q}$(to), $\dot{\boldsymbol{q}}$(to) i vremenske promene ubrzanja $\ddot{\boldsymbol{q}}$ (t). Ako primijenimo sličnu ideju, tada će šema rješavanja direktnog problema dinamike izgledati kao na slici 4.5a.



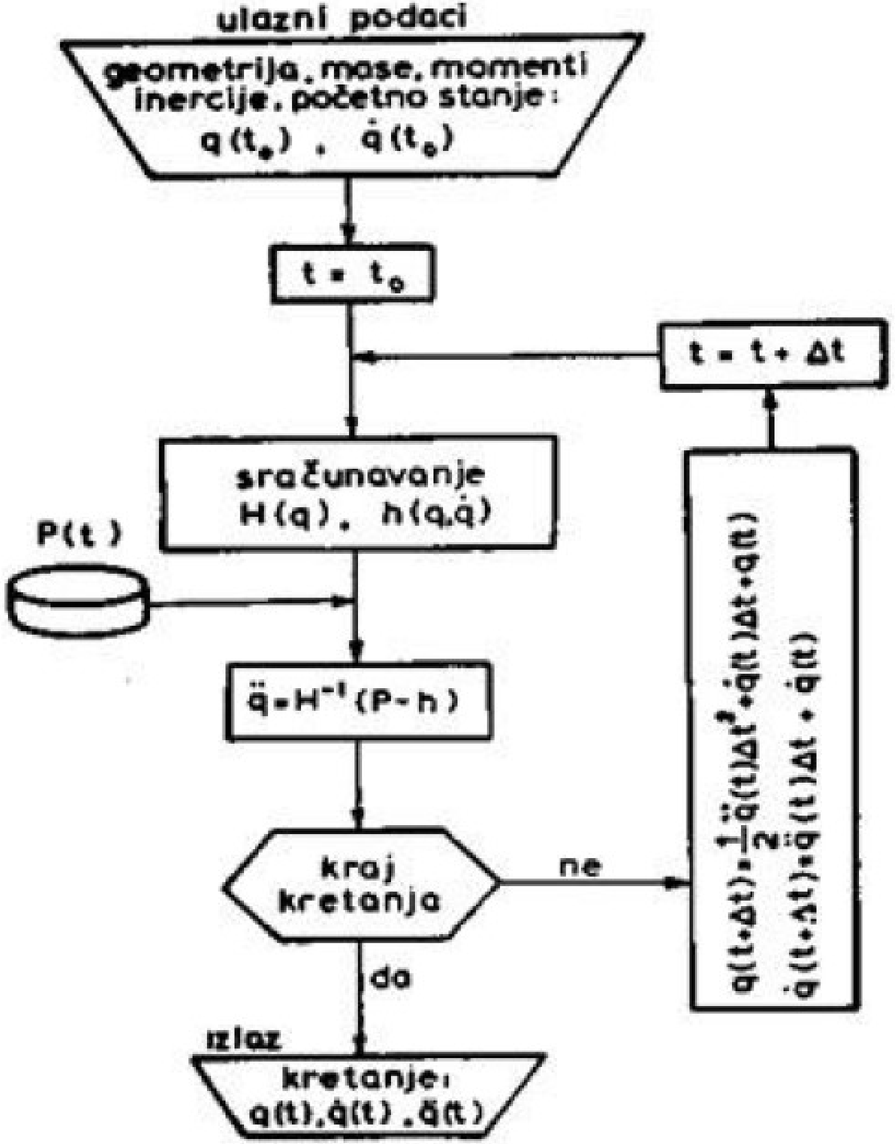
Shema rješavanja direktnog problema dinamike

U opisanom postupku rješavanja direktnog problema smatrali smo da je kretanje zadato preko unutrašnjih koordinata q(t) ili preciznije preko unutrašnjih ubrzanja $\ddot{q}$ (t). U teoriji kinematike robota ističe se da je kretanje pogodnije zadati preko spoljašnjih koordinata X(t). Tada se rješavanje direktnog problema dinamike mora kombinovati sa rješavanjem inverznog problema kinematike (sl. b).

Razmotrićemo sada rješavanje inverznog problema dinamike. On podrazumijeva nalaženje kretanja q(t) ili X(t) ako je poznat zakon promene pogona P(t). U stvari, potrebno je izvršiti integraciju sistema diferencijalnih jednačina. Jedan jednostavni postupak integracıje predstavljen je na slici 4.6 i zasnovan je na ideji da se ubrzanja $\ddot{q}$ smatraju konstantnim na malom intervalu Δt. Druga mogućnost je da se sistem jednačina napİše u obliku

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ H^{-1}(q)(P(t) - h(q,\dot{q})) \end{bmatrix}$$

koji je pogodan za upotrebu bilo koje od standardnih metoda za numeričku integraciju sistema diferencijalnih jednačina



. Shema rješavanja inverznog problema dinamike

KorIšćenjem bilo kog od spomenuta dva pristupa, dobijamo zakon kretanja u unutrašnjim koordinatama $\boldsymbol{q(t)}$, unutrašnje brzine $\dot{\boldsymbol{q}}$(t) i ubrzanja $\ddot{\boldsymbol{q}}$ (t). Dobijene funkcije su, naravno, diskretizovane. Ako želimo da nađemo kretanje u spoljašnjim koordinatama onda je potrebno riješiti još i direktni problem kinematike.

KOMPLETAN MODEL DINAMIKE ROBOTA

Ranije smo naglasili da izvedeni dinamicki model ne opisuje kompletnu dinamiku robota. Naime, izveli smo model za mehanizam robota, a nijesmo uključili dinamiku pogonskih motora. Sada ćerno izvesti kompletan dinamički model koji povezuje upravljačke veličine (napon kod motora jednosmjerne struje i struja servorazvodnika kod hidrauličnog motora) sa kretanjem robota (q(t)).

U principu, kompletan dinamički model odreden je modelom mehanizma kome se pridružuju modeli motora. Tako, ako se robot pokreće elektromotorima jednosmerne struje, tada modelu mehanizma pridružujemo model motora za svaki zglob i=1,2,..,n Takode, potrebno je definisati vezu koordinata obrtanja motora (θ_j) i koordinata pomeranja zgloba (q_j) , dakle prenosni sistem, a zatim i promjenu momenta kroz taj prenos. Ranije smo izveli transformaciju kretanja i pogona kroz prenosni sistern sa reduktorom što je opisano odgovarajućim relacijama.

$$S_M: \quad H(q)\ddot{q} + h(q,\dot{q}) = P$$

$$S_A: \quad \dot{x}_j = C_j x_j + f_j P_{Mj} + d_j u_j, \quad j = 1,\ldots,n$$

$$x_j = [\theta_j \dot{\theta}_j i_j]^T$$

$$S_T: \quad \begin{array}{l} P_j = N_j P_{Mj} \\ q_j = \theta_j / N_j, \end{array} \qquad \text{j=1,...,n}$$

Naglasimo da model S_A može biti i nižeg reda, na primjer, drugog reda .

Naglasimo takode da linearnost relacije po naponu u, važi samo do odredene granične vrijednosti. U opštem slučaju, umesto $\mathbf{u_j}$, pisali bismo funkciju $\mathbf{n(u_j)}$ koja predstavlja nelinearnost tipa zasićenja.

Konačno, recimo još da prenos pogona uvijek unosi gubitke, što obično izražavamo kroz koeficijent korisnog dejstva.

Razmotrimo sada mogućnost da se ukupni dinamički model napiše u kompaktnoj formi. Smatraćemo da se model svakog pogonskog sistema može uz odredena uprošćenja linearizovati i opisati jednačinom.

$$S_A : \qquad \dot{x}_j = C_j x_j + f_j P_{Mj} + d_j u_j, \quad j = 1, \ldots, n$$

$$x_j = [\theta_j \dot{\theta}_j i_j]^T$$

Red modela tj. dimenzija vektora $\mathbf{x_j}$ neka je $\mathbf{n_j}$, a vektor sadrži određene promjenljive koje definišu stanje sistema. $\mathbf{u_j}$ predstavlja upravljačku promjenljivu koja odgovara posmatranom pogonskom sistemu, a $\mathbf{P_{Mj}}$ İzlazni pogon (momenat ili sila). Dalje, radi jednostavnosti izvodenja pretpostavimo direktnu vezu pomjeranja motora i pomeranja zgloba ($\mathbf{N_J}$ =1) što ne umanjuje opštost jer se prenosni odnos lako može ugraditi u model.

Model mehanizma SM napišemo u obliku

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{dt}} = \begin{bmatrix} \xi_2 \\ H^{-1}(\xi_1)(P - h(\xi_1, \xi_2)) \end{bmatrix}$$

gdje je $\xi_1 = q, \xi_2 = \dot{q}$ i $\xi = [\xi_1^T \xi_2^T]^\mathrm{T}$. ξ je kolona vektor stanja mehanizma i dimenzija mu je 2n. Prethodna relacija se može napisati u obliku:

$$\dot{\xi} = K(\xi) + D(\xi)P$$

gdje je

$$K(\xi) = \begin{bmatrix} \xi_2 \\ -H^{-1}(\xi_1)h(\xi_1, \xi_2) \end{bmatrix}, \quad D(\xi) = \begin{bmatrix} 0 \\ H^{-1}(\xi_1) \end{bmatrix}$$

Posmatrajmo ponovo motore. Neka se kj elemenata vektora xj poklapa sa elementima vektora ξ tj. kj koordinata stanja motora "j" je već sadržano u vektoru stanja mehanizma. Na primjer, obrtanje motora (θ_j) i brzina $\dot{\theta}_j$ se po pretpostavci poklapaju sa $\mathbf{q_j}$ i $\dot{\mathbf{q}}_\mathbf{j}$ i uključeni su u ξ, Tada bi bilo kj =2 İ $\sum_{j=1}^{n}$ kj=2n Čime je popunjen cio vektor ξ.

Napišimo sada model S_A u kompaktnoj formi

$$S_A: \quad \dot{x} = Cx + FP + Du$$

gde je kolona vektor stanja x=$[x_1^T \ldots x_n^T]^T$ dimenzije $N = \sum_{j=1}^{n} n_j$. Dalje je $P = [P_1 \ldots P_n]^T$, $u = [u_1 \ldots u_n]^T$, $C = \text{diag}[C_1 \ldots C_n]$, $F = \text{diag}[f_1 \ldots f_n]$, $D = \text{diag}[d_1 \ldots d_n]$. Uočimo da je ceo vektor ξ uključen u x pa x definiše ukupno stanje robota.

Ujedinimo sada modele S_M i S_A tj (4.14) i (4.20). Uvedimo prvo matricu T_j dimenzije $1 \times n_j$ takvu da je $\ddot{q}_j = T_j \dot{x}_j$. Na primer, T_j=[0 1 0] ako je x_j odredeno sa (4.15b) i $q_j = \theta_j$. Sada iz (4.14) sledi

$$P = H \cdot T\dot{x} + h \tag{4.21}$$

gde je T=diag $[T_1 ... T_n]$. Zamenom $\dot{x}$ iz (4.20) i (4.21) dobija se

$$P = (E_n - HTF)^{-1}\{HT(Cx + Du) + h\} \tag{4.22}$$

gde je E_n jedinična matrica dimenzije n x n. Zamenimo sada P iz (4.22) u (4.20) čime dobijamo kompletni model dinamike robota u obliku

$$\dot{x} = \hat{C}(x) + \hat{D}(x)u \tag{4.23}$$

Matrice sistema su

$$\hat{C}(x) = Cx + F(E_n - HTF)^{-1}(HTCx + h)$$

$$\hat{D}(x) = D + (E_n - HTF)^{-1} HTD$$

Očigledno da sada pojam direktnog i inverznog problema dinamike treba preformulisati. Direktni problem podrazumijeva nalaženje upravljanja u(t) koje je potrebno da bi se ostvarilo zadato kretanje robota, a inverzni problem podrazumijeva nalaženje kretanja ukoliko je poznato upravljanje. Ovo drugo nazivamo simulacijom.

PRIMJENA RAČUNARA ZA PRORAČUN DINAMIKE

Iz dosadašnjeg izlaganja o formiranju matematičkog modela dinarnike robota možemo zaključiti da se teško može izvršiti ručno sastavljanje takvog modela. Ovaj zaključak trebalo bi obrazložiti. Postupak za formiranje diferencijalnih jednačina kretanja omogućava, u principu, da se jednačine napišu ručno. Medutim, takav pristup ima mnogo nedostataka. Prvo, jako je velika mogućnost grešaka pri tako složenom izvodenju. Drugo, ako se matematički model i formira bez greške, on će biti veoma kabast i nepodesan za upotrebu. Iste mane pojaviće se ako se za ručno formiranje modela izabere bilo koji drugi mehanički pristup. Otuda se javlja ideja da se cio taj složeni posao formiranja i rešavanja matematičkog modela robota prebaci na računar. Postupak za formiranje matematičkog modela formuliše se tako da ima rekurzivni karakter, te je veoma prikladan za primjenu na računaru. Objasnimo sada ideju primjene računara za rešavanje dinamike.

Algoritam formiranja dinamičkog modela

Da bi objasnili rekurzivni algoritam za formiranje dinamičkog modela ponovićemo neophodne kinematske relacije u rekurzivnoj formi.
Dvije osnovne vrste zglobova koje se koriste u kinematskim lancima manipulacionih robota su rotacioni i translatorni zglob sa po jednim stepenom slobode.
Razmotrimo prvo jednostavniji slučaj kada je i+1-vi zglob prizmatičan. Obzirom da linearno kretanje koje generiše ovaj zglob ne uzrokuje promjenu ugaone brzine i ubrzanja i+1-vog segmenta, važi

$$\begin{aligned} \vec{\varpi}_{i+1} &= \vec{\varpi}_i \\ \dot{\vec{\varpi}}_{i+1} &= \dot{\vec{\varpi}}_i \end{aligned} \tag{6.54}$$

Za brzine i ubrzanja važe relacije

$$\vec{v}_{i+1} = \vec{v}_i + \dot{q}_{i+1}\vec{z}_i + \vec{\varpi}_i \times \vec{r}_{i,i+1}$$
$$\vec{a}_{i+1} = \vec{a}_i + \ddot{q}_{i+1}\vec{z}_i + \dot{\vec{\varpi}}_i \times \vec{r}_{i,i+1} + 2\vec{\varpi}_i \times \dot{q}_i\vec{z}_i + \vec{\varpi}_i\left(\vec{\varpi}_i \times \vec{r}_{i,i+1}\right) \tag{6.55}$$

Ako je i+1-vi zglob rotacioni on doprinosi ugaonoj brzini i ubrzanju narednog segmenta pa važi

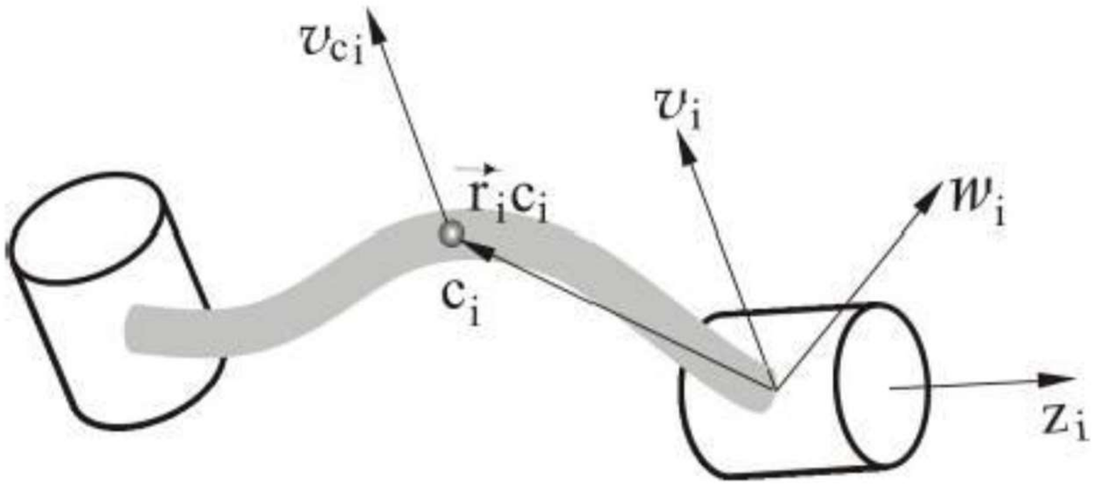
$$\vec{\varpi}_{i+1} = \vec{\varpi}_i + \dot{q}_{i+1}\vec{z}_i$$
$$\dot{\vec{\varpi}}_{i+1} = \dot{\vec{\varpi}}_i + \ddot{q}_{i+1}\vec{z}_i + \vec{\varpi}_i \times \dot{q}_i\vec{z}_i \tag{6.56}$$

dok za linearne brzine i ubrzanja važi

$$\vec{v}_{i+1} = \vec{v}_i + \vec{\varpi}_i \times \vec{r}_{i,i+1}$$
$$\vec{a}_{i+1} = \vec{a}_i + \dot{\vec{\varpi}}_{i+1} \times \vec{r}_{i,i+1} + \vec{\varpi}_{i+1} \times \left(\vec{\varpi}_{i+1} \times \vec{r}_{i,i+1} \right) \tag{6.57}$$

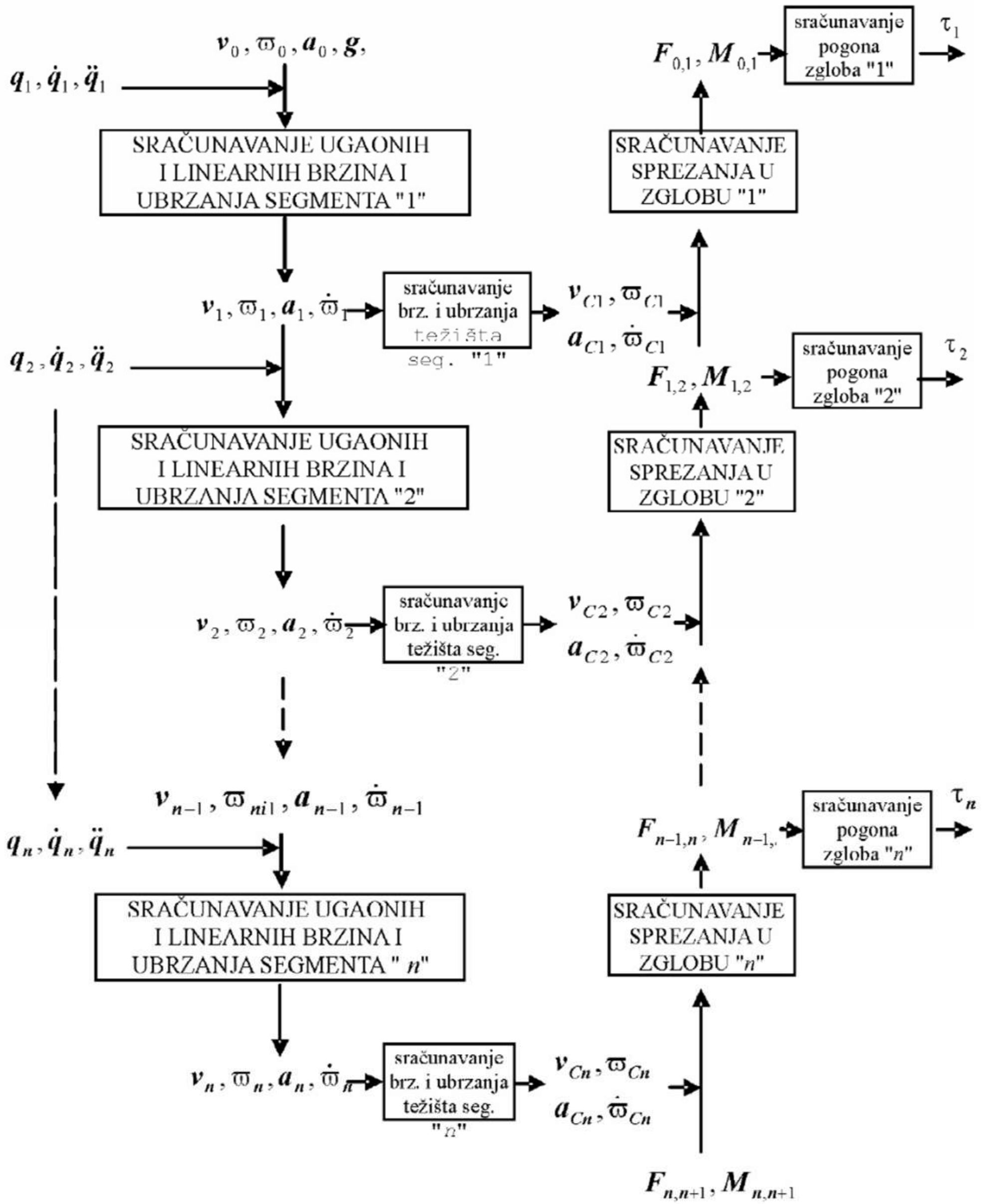
Treba napomenuti da su Njutn-Ojlerove jednačine izražene u odnosu na ubrzanja težišta, dok su gornji rekurzivni izrazi izraženi u odnosu na koordinatne sisteme koji se nalaze na svakom od segmenata (prema DH notaciji njihovi koordinatni počeci se nalaze na ortovima zglobova). Na Sl. 6.16 su prikazane linearna i v_i i ugaona brzina ϖi izražene u odnosu na lokalni koordinatni sistem segmenta. Linearna brzina težišta je tada data sa

$$\vec{v}_{Ci} = \vec{v}_i + \vec{\varpi}_i \times \vec{r}_{i,Ci} \tag{6.58}$$



Sl. 6.16. Brzine u zglobu i težištu segmenta

Na Sl. 6.17 je šematski prikazan algoritam za rješavanje zadatka direktne dinamike i sračunavanje pogonskih momenata u zglobovima mehanizma. Pretpostavlja se da su svi podaci o mehanizmu robota i trajektoriji zglobova poznati i zadati.

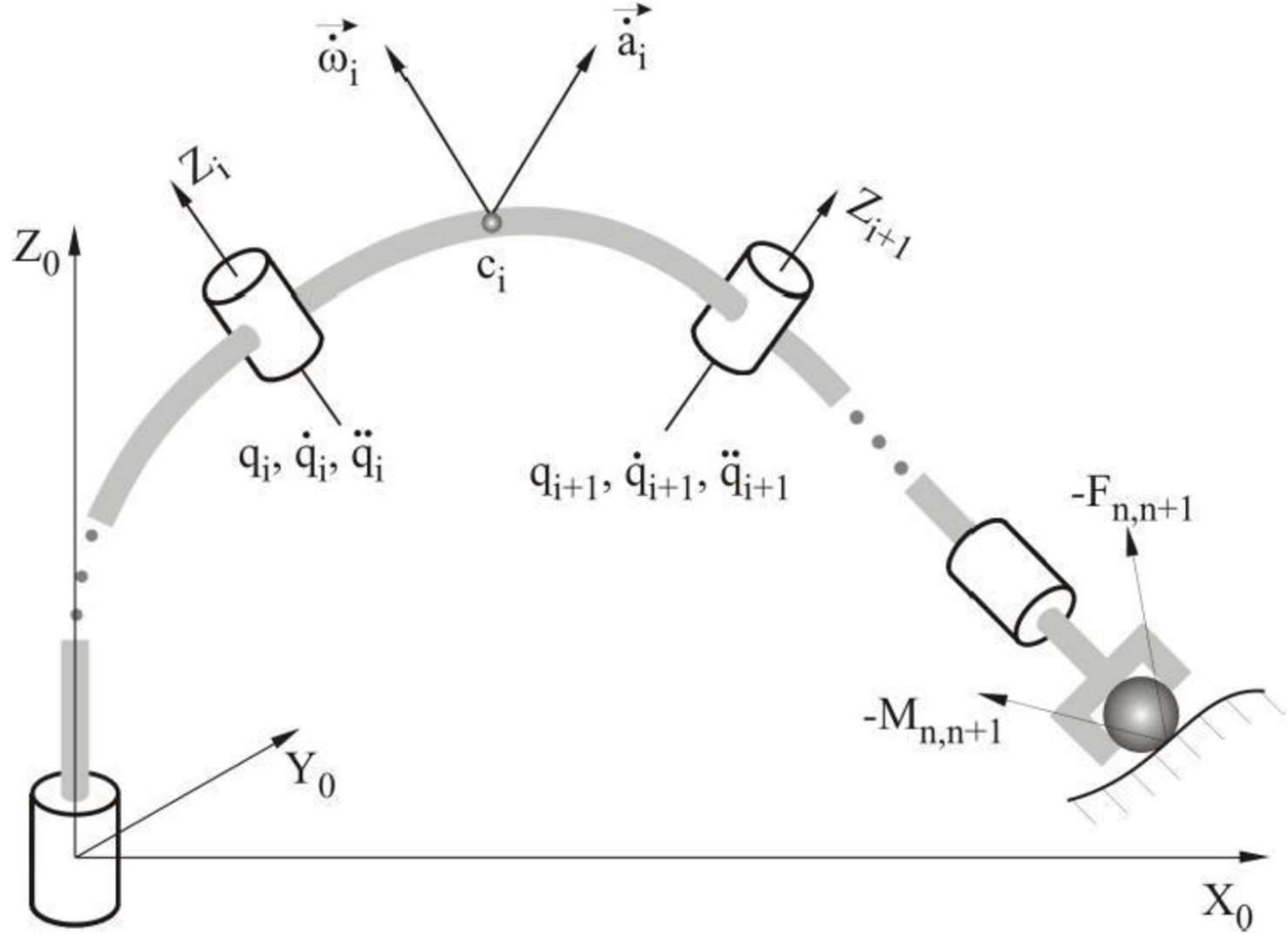


Sl. 6.17. Algoritam sračunavanja pogonskih momenata

Proces počinje učitavanjem podataka o kretanju baze robota (segment 0). Ukoliko je baza robota nepokretna njene brzine i ubrzanja su jednaki nuli. Zatim se, na osnovu informacije o kretanju u zglobu 1 (q_1, $\dot{q}_1$, $\ddot{q}_1$) i na osnovu jednačina (6.55), (6.56) i (6.57) sračunavaju brzine i ubrzanja ($\vec{v}_1$, $\vec{\varpi}_1$, $\vec{a}_1$, $\dot{\vec{\varpi}}_1$) segmenta 1, tj. njemu pripadajućeg koordinarnog sistema. Ove informacije se prosleđuju dalje, pa se na osnovu ovih podataka i informacija o kretanju u zglobu 2 (q_2, $\dot{q}_2$, $\ddot{q}_2$) sračunava kretanje segmenta 2 ($\vec{v}_2$, $\vec{\varpi}_2$, $\vec{a}_2$, $\dot{\vec{\varpi}}_2$). Procedura se nastavlja dalje, sve dok se ne stigne do poslednjeg segmenta u kinematskom lancu. U svakom koraku se dodatno, čim se podaci o kretanju *i*-tog segmenta sračunaju ($\vec{v}_i$, $\vec{\varpi}_i$, $\vec{a}_i$, $\dot{\vec{\varpi}}_i$), na osnovu jednačine (6.58) sračunaju i brzine i ubrzanja njegovog težišta ($\vec{v}_{Ci}$, $\vec{\varpi}_{Ci}$, $\vec{a}_{Ci}$, $\dot{\vec{\varpi}}_{Ci}$) radi kasnijeg korišćenja u algoritmu.

Pošto su kinematske veličine za sve segmente sračunate, započinje se sa sračunavanjem potrebnih pogonskih momenata u zglobovima mehanizma. Sračunavanje polazi, na osnovu jednačine (6.53), od poznate vrednosti sile i momenta ($\vec{F}_{n,n+1}$, $\vec{M}_{n,n+1}$) kojim poslednji segment (hvataljka) robota deluje na okolinu, a koja sledi iz tehnoloških uslova zadatka. (U slučaju da se robot kreće slobodnim prostorom i da nema kontakt sa okolinom, $\vec{F}_{n,n+1}$ i $\vec{M}_{n,n+1}$ su jednaki nuli.) Zatim se sračunavaju sile i momenti sprezanja u zglobovima $\vec{F}_{i,i+1}$ i $\vec{M}_{i,i+1}$ čijim projektovanjem na osu zgoba (jednačine (6.4) i (6.5)) dobijamo pogonski moment, tj. komponentu koja mora da se uravnoteži dejstvom motora u zglobu, i koju sama struktura zgloba ne može da primi.

$$\begin{aligned} \vec{F}_{i-1,i} &= \vec{F}_{i,i+1} + m_i \dot{\vec{v}}_{Ci} - m_i \vec{g} \\ \vec{M}_{i-1,i} &= \vec{M}_{i,i+1} - \vec{r}_{i.Ci} \times \vec{F}_{i,i+1} + \vec{r}_{i-1,Ci} \times \vec{F}_{i-1,i} + I_i \cdot \dot{\vec{\varpi}}_i - \vec{\varpi}_i \times (I_i \cdot \vec{\varpi}_i) \end{aligned} \tag{6.53}$$



Rekurzivno formiranje dinamičkog modela

Pogon (obilježimo ga oznakom τ) u slučaju translatornog zgloba predstavlja silu i može se sraćunati kao skalarni proizvod orta odgovarajuće ose zgloba i vektora sile

$$\tau_i = z_{i-1} \cdot F_{i-1,i} \quad (6.4)$$

U slučaju rotacionog zgloba τ je moment i može se, analogno (6.4), sračunati kao skalarni proizvod orta odgovarajuće ose zgloba i vektora momenta opterećenja

$$\tau_i = z_{i-1} \cdot M_{i-1,i} \quad (6.5)$$

Treba primetiti da u oba prethodna slučaja trenje u zglobovima nije uzeto u obzir jer je tribološka situacija u samom zglobu u suštini nepoznata i promenljiva tokom vremena. Pogonski momenti u zglobovima τ_i se mogu objediniti u jedan vektor

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \vdots \\ \tau_n \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

koji nazivamo vektorom pogona i koji može sadržavati sile ili momente u zavisnosti od tipa zglobova.

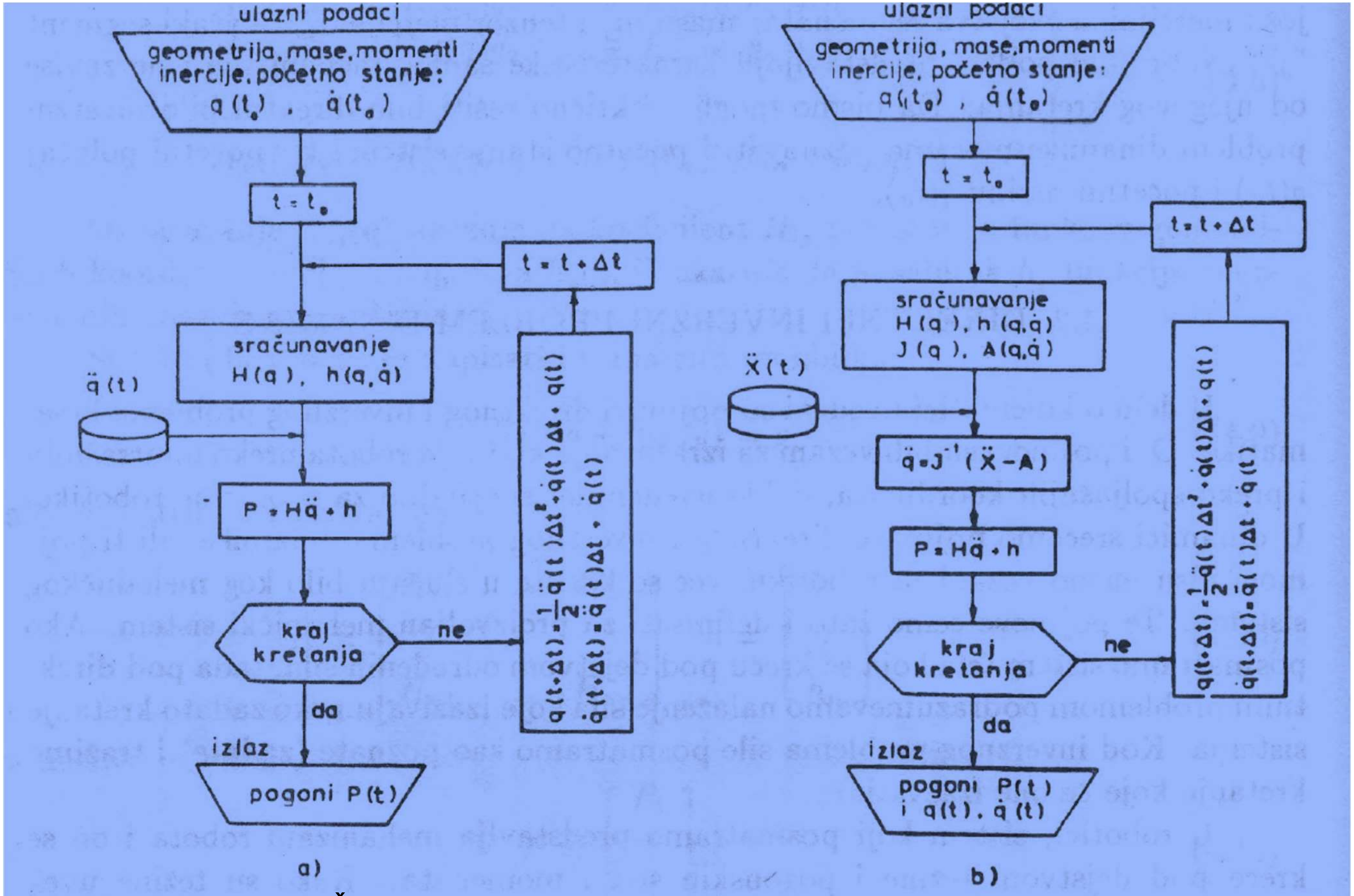
Posmatrajmo matematički model .

$$\tau = \mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{G}$$

Matrice modela **H (q)** i **h(q,**$\dot{\mathbf{q}}$**)** mogu se posmatrati kao analitički izrazi koji odreduju zavisnost od **q**, odnosno od **q i** $\dot{\mathbf{q}}$. S druge strane možemo **H(q)** i **h(q,**$\dot{\mathbf{q}}$**)** tretirati kao složene računarske postupke kojima se izračunava brojna vrednost **H** polazeći od brojno poznałog **q** i, takode, brojna vrednost **h**, polazeci od **q i** $\dot{\mathbf{q}}$.

Tako, kompletne analitičke izraze za matematički model na ovaj način nećemo dobiti, ali postupci za brojno sračunavanje matrica modela dovoljni su za rješavanje direktnog i inverznog problema dinamike. Prvi računarski postupci za proračun dinamike bili su zasnovani na ovakvom postupku. Oni su omogućili širu primjenu računara u robotici.

Opisani numerički pristup ima i svoje nedostatke. Šeme na slikama na sledećem slajdu pokazuju da je sračunavanje matrica **H** i **h** neophodno izvršiti ponovo kada god se promijene vrednosti $\mathbf{q}$ **i** $\dot{\mathbf{q}}$, dakle u svakom koraku integracije. Pri takvom računu svaki put će se iznova sračunavati i mnoge veličine koje ne zavise od $\mathbf{q}$ **i** $\dot{\mathbf{q}}$ i koje se nijesu mijenjale. Očigledno, ponešto će se nepotrebno računati jer se moglo izračunati samo jednom, na početku. U svakom slučaju, opisani numerički pristup ne omogućava da se u proračunu izdvoje ti elementi koji ne zavise od $\mathbf{q}$ **i** $\dot{\mathbf{q}}$ od onih koji zavise i koji se moraju računati za svaki trenutak vremena ponovo. Zato se došlo na ideju da se odustane od numeričkog modela i da se vrati na analiticke izraze **H(q)** i $\mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$. Ovo liči na povratak ručnom pisanju modela, medutim, u ovom novom pristupu analitičke izraze sastavlja računar. U dobijenim izrazima lako se izdvajaju elementi koji ne zavise od $\mathbf{q}, \mathrm{i}\ \dot{\mathbf{q}}$ i koji se mogu izračunati samo jednom, na početku. Ovakav pristup se obično naziva simboličkim modelom.



Šema rješavanja direktnog problema dinamike

Računarski postupci za formiranje i rješavanje dinamičkog modela omogućili su da se konačno sretnu teorija i praksa robotike. Do tada, teorija se razvijala pretežno akademski, bez ozbiljnije primjene, a praksa je napredovala nezavisno, oslanjajući se na znanja iz oblasti automatskog upravljanja. Jasno je da je takva praksa imala svoje granice preko kojih nije moglo preći bez cjelovitije teorije robota. Primjena računara za rješavanje kinematike i dinamike ornogućila je da se prevaziđu nedostaci teorije robotike i ona postane upotrebljiva u praksi.

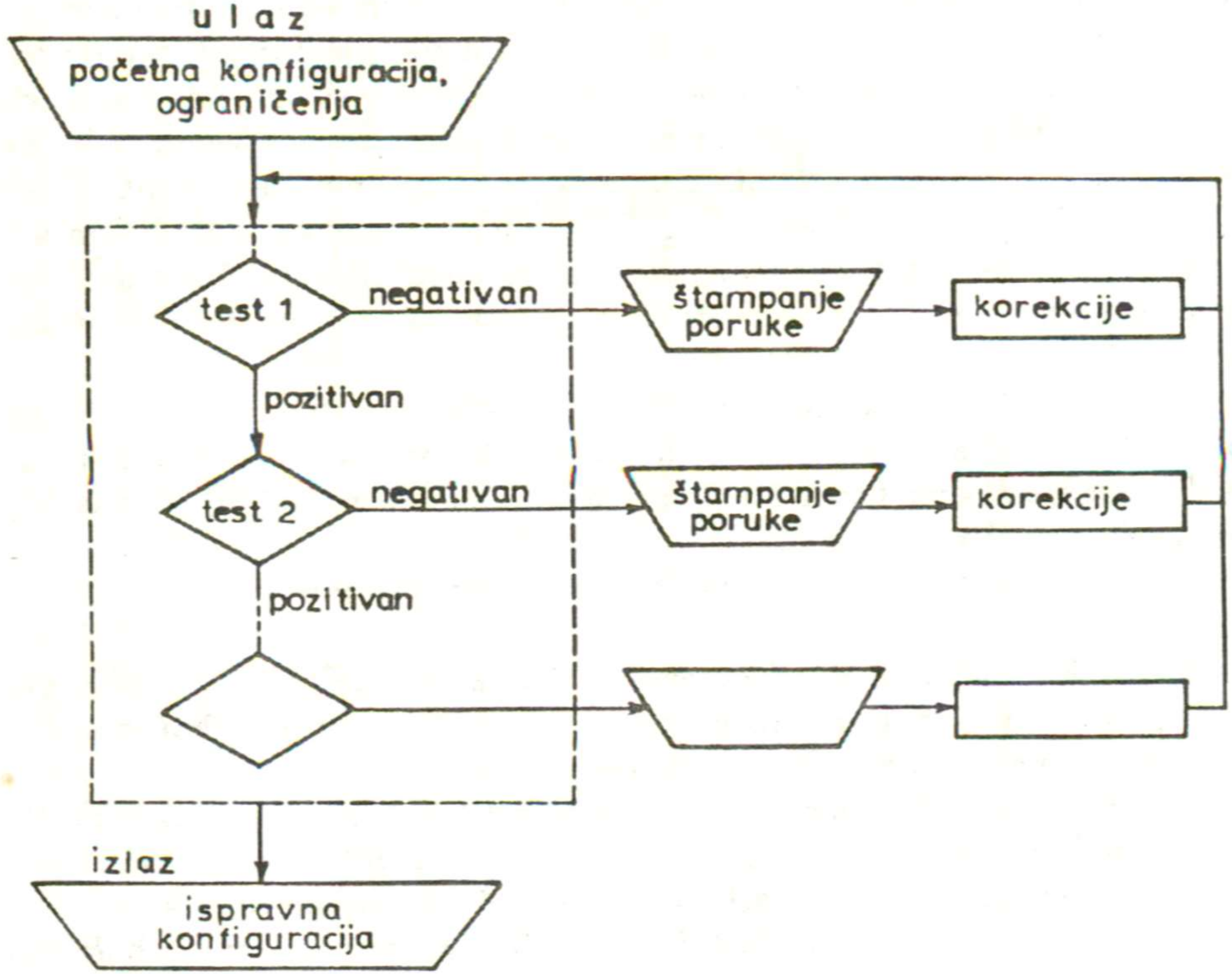
Ovakva, računarski orijentisana kinematika i dinamika iskorišćene su s jedne strane za razradu savršenijih metoda upravljanja robotima, a s druge strane za razvoj metoda računarskog projektovanja robota. Kako ćemo se upravljanjem baviti u posebnom dijelu, to ćemo ovdje obratiti pažnju na mogućnosti primjene dinamike i računara u procesu projektovanja mehanizma i pogonskog sistema robota.

Postupak za rješavanje direktnog problema dinamike ornogućava da se, polazeći od željenog kretanja izraženog preko spoljašnjih koordinata **X (t)**, izračuna promjena unutrašnjih koordinata **q(t)**, brzina $\dot{\mathbf{q}}$(t) kao i potrebni pogonski momenti **P (t)**. Ovi podaci već sami po sebi mogu biti korisni, a na osnovu jednačina koje opisuju kinematiku i dinamiku robota moguće je izračunati i niz drugih karakteristika. Moguće je odrediti sve reakcije u zglobovima, a zatim za svaki od segmenata naci raspodjelu sila koje na njega djeluju. Odatle se dobijaju mehanički naponi u materijalu (npr. naponi savijanja i uvijanja). Sledeći korak je proračun elastičnih deformacija. Proračun deformacija može biti uprošćen jer bi egzaktno tretiranje zbog tog problema vodilo ka elastodinamici koju najčešće moramo rješavati primjenom metode konačnih elemenata. U svakom slučaju proračun napona i deformacija služice nam kao osnova za projektovanje dimenzija robota.

Proračunom dinamike robota dobija se niz karakteristika potrebnih za izbor pogonskih motora. Pored potrebnih momenata i brzina lako možemo sračunati potrebnu snagu, a takode formirati dijagram brzina-momenat ($\mathbf{P}$-$\dot{\mathbf{q}}$). Ovakav dijagram može se upoređivati sa kataloškim karakteristikama motora. Na opisani model dinamike robota lako se dodaje modul za proračun grijanja i prenosa toplote u motorima.

Moguće je izračunati još neke dinamičke karakteristike kao što je utrošak energije itd. Tako dolazimo do zaključka da raspolažemo postupkom koji omogućava da se zada željena konfiguracija robota (dimenzije, mase, itd.) i željeni manipulacioni zadatak, a kasnije izračuna niz dinamičkih karakteristika. Takav postupak nazivamo algoritmom za dinamičku analizu. Ovaj algoritam, u vidu računarskog programa, predstavlja korisnu alatku u procesu projektovanja robota. Projektant može brzo proanalizirati veći broj različitih konfiguracija robota radi izbora najpovoljnije. Može i mijenjati pojedine dimenzije i druge parametre da bi uočio uticaj tih promjena na važne dinamičke karakteristike. Sve ovo omogućava brže i uspješnije projektovanja.

Sledeći korak u korišćenju računara za projektovanje robota je formiranje takozvanog interaktivnog postupka projektovanja i odgovarajućeg programskog paketa. Cilj nam je da za postavljeni manipulacioni zadatak odaberemo konfiguraciju robota (dimenzije, motore itd.) koja će zadovoljiti sve postavljene zahtjeve i sva ograničenja. Kao primjer ograničenja možemo navesti uslov da elastična deformacija segmenata robota bude manja od dozvoljene vrijednosti. Šema programa prikazana je na slici na sledećem slajdu. Postupak kreće od neke zadate početne konfiguracije robota. Izvrši se dinamička analiza i testiranje izračunatih dinamičkih karakteristika. Ukoliko su svi testovi pozitivni, dakle sva ograničenja zadovoljena, onda je posmatrana konfigracija dobra. Ako pak neki test bude negativan, dakle neko od ograničenja ne bude zadovoljeno, računar će štampati odgovarajuću poruku kao i preporuke za izmjene konfiguracije koje će popraviti negativni test. Programski paket sadrži i posebne konunikacione potprograme koji omogućavaju projektantu jednostavnu izmjenu pojedinih podataka o konfiguraciji robota. Nakon što je projektant uveo korekcije konfiguracije, postupak kreće od početka tj. vrši novu dinamičku analizu i testiranje. Takav ciklus se ponavlja sve dok se konačno ne dođe do konfiguracije koja zadovoljava sve zahtjeve i sva ograničenja, a to će biti onda kada svi testovi budu pozitivni.



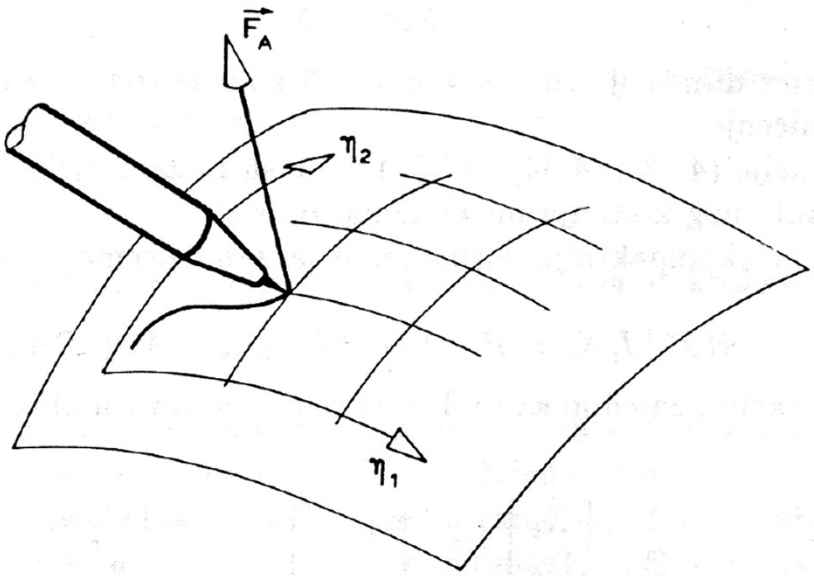
Algoritam za interaktivno projektovanje

Krajnji korak u korišćenju računara u projektovanju robota je formiranje postupka i programskog paketa koji bi na osnovu postavljenih zahtjeva vršio automatski izbor najpovoljnije konfiguracije robota. Ovaj postupak podrazumijeva difinisanje nekog kriterijuma optimalnosti i razvoj pogodnih metoda optimizacije.

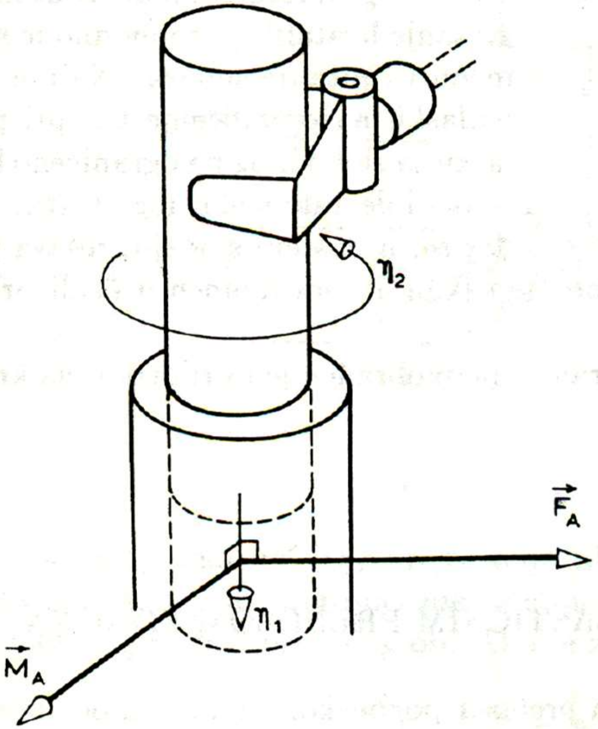
Ovim bismo zaključili izlaganje ideja računarskog projektovanja u robotici. Opisane postupke dopunjavamo i programima za simulaciju i grafičko prikazivanje čime kompletiramo programski paket za računarsko projektovanje

DINAMIKA ROBOTA SA OGRANIČENIM KRETANJEM HVATALJKE

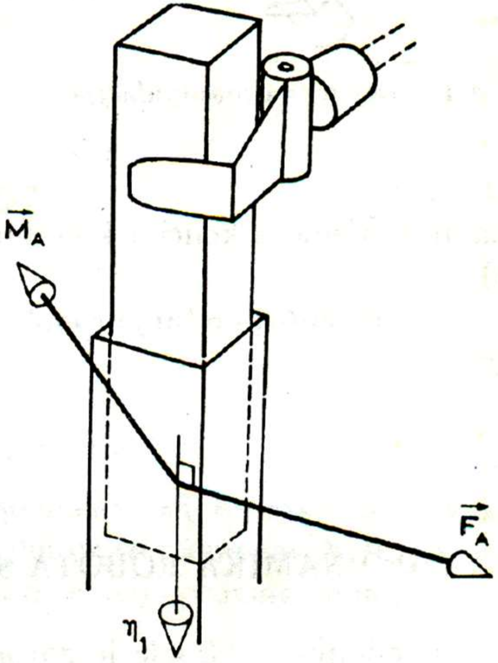
Ovaj dio obrađuje dinamiku robota čija hvataljka ne može da se kreće proizvoljno u prostoru, već su joj nametnute odredena ograničenja. Pri ovome naglasimo da pod terminom hvataljka podrazumijevamo poslednji segment lanca bez obzira na završni uređaj koji se tu nalazi. Ovakva ograničenja nametnuta kretanju hvataljke česta su u nekim fazama izvršenja robotskog zadatka. Na primjer, ako robot treba da piše po nekoj površini (SI. 4.9) tada hvataljka ne može da se kreće proizvoljno već se vrh pisaljke prinudno kreće po površini, Drugi primjer bi se mogao naći u zadacima montaže (SI. 4.10 i 4.11). Ako, robot uvlači neki predmet u otvor tada je kretanje poslednjeg segmenta (koji u sebe uključuje i predmet) ograničeno na jednu translaciju i eventualno jedno obrtanje. Konačno, ograničenja se javljaju i u slučajevima dvoručne ili višeručne manipulacije (SI. 4.12). Niz drugih primjera mogao bi se navesti. U svakom slučaju jasno je da uvedena ograničenja smanjuju broj stepeni slobode hvataljke, a takode, ograničenja izazivaju pojavu sila reakcije veze koje bitno utiču na dinamiku robota. Ovdje ćemo problem tretirati tako da pokrijemo one slučajeve koji su interesantni za praktičnu primjenu



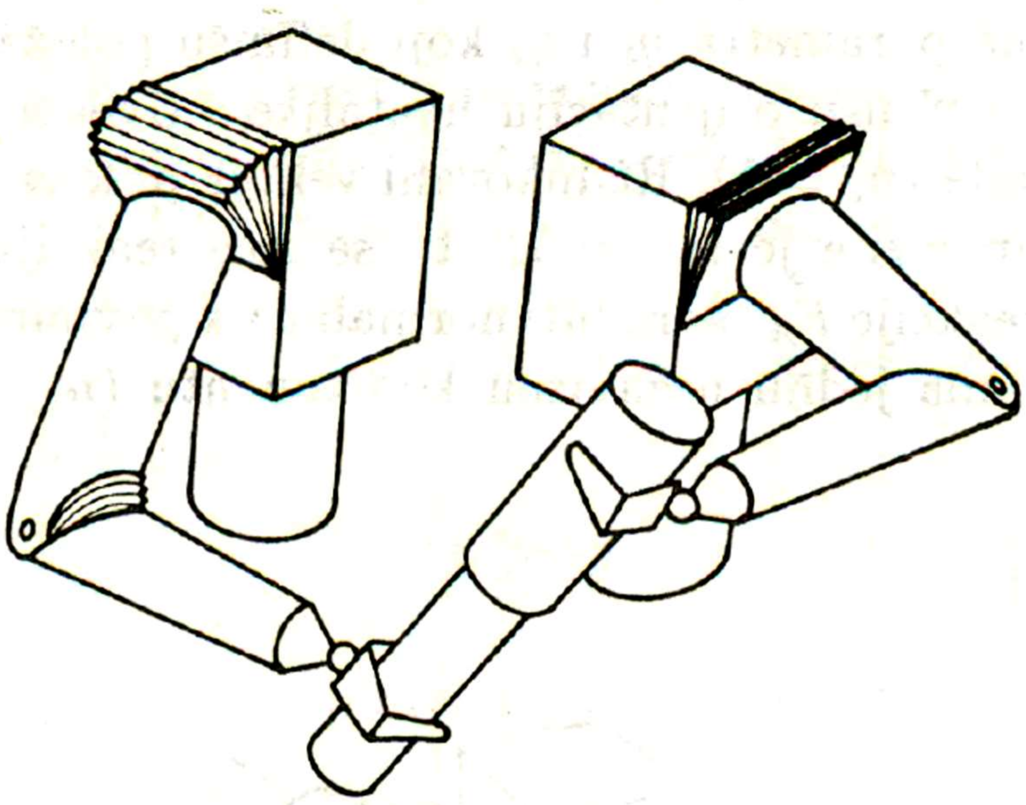
Sl. 4.9. Zadatak pisanja – ograničenje tipa površine



Sl. 4.10. Zadatak montaže – ograničenje tipa cilindričnog para



Sl. 4.11. Zadatak montaže – ograničenje tipa translatornog para



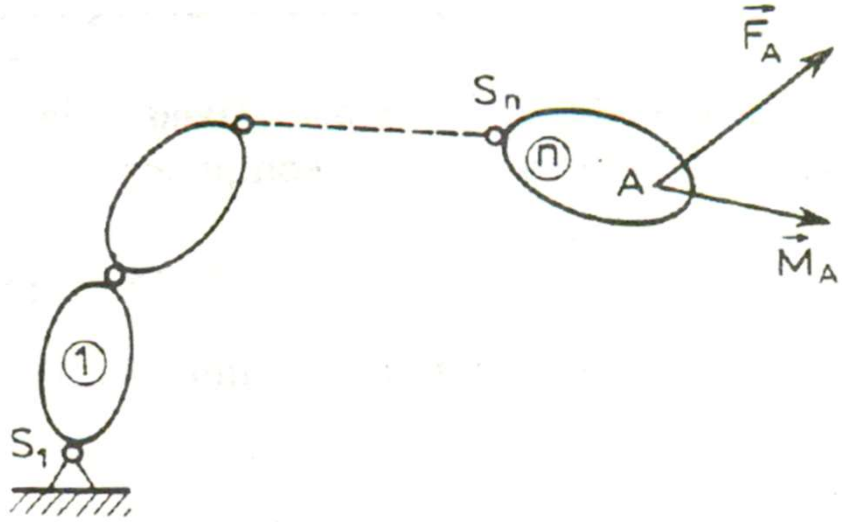
Sl. 4.12. Dvoručna manipulacija

Posmatrajmo radi uprošćenja robot sa n=6 stepeni slobode i smatrajmo da tokom izvršenja zadataka robot ne dolazi u singularne položaje. U tom slučaju, bez uvedenih ograničenja hvataljke bi takođe imala 6 stepeni slobode. Dinamiku ovakvog mehanizma možemo opisati modelom

$$H(q)\ddot{q} + h(q, \dot{q}) = p$$

Radi daljeg izvodenja proširimo posmatranje na robota na čiji poslednji segment, u zadatoj tacki A, deluje Sila F_A i još djeluje spreg momenta M_A (SI. 4.8). Tacka A definisana je vektorom $\overrightarrow{C_n A}$.

Dinamiku ovakvog mehanizma opisujemo modelom:



Sl. 4.8. Mehanizam robota sa silom i momentom koji deluju na hvataljku

$$H\ddot{q} + h = P + D_F F_A + D_M M_A$$

gde je F_A matrica dimenzija 3×1 koja sadrži elemente vektora $\vec{F}_A$, matrica M_A (takođe 3×1) sadrži vektor $\vec{M}_A$ (dakle zadržavamo dogovor o pisanju vektora u obliku 3×1 matrice i obrnuto). D_F i D_M su odgovarajuće matrice dimenzija $n\times3$ koje pokazuju uticaj $\vec{F}_A$ i $\vec{M}_A$ na generalisane sile u zglobovima:

$$D_F = \begin{bmatrix} d_{F1}^T \\ \vdots \\ d_{Fn}^T \end{bmatrix}, \quad \vec{d}_{Fj} = \begin{cases} \vec{e}_j \times \vec{r}\,{}^j_A, & s_j = 0 \\ \vec{e}_j, & s_j = 1 \end{cases} \tag{4.26}$$

$$\vec{r}\,{}^j_A = \overrightarrow{S_j A} = \sum_{k=j}^{n-1} (\vec{r}\,'_{k,k} - \vec{r}_{k,k+1}) + \vec{r}\,'_{n,n} + \vec{p} \tag{4.27}$$

$$D_M = \begin{bmatrix} d_{M1}^T \\ \vdots \\ d_{Mn}^T \end{bmatrix}, \quad \vec{d}_{Mj} = \begin{cases} \vec{e}_j, & s_j = 0 \\ 0, & s_j = 1 \end{cases} \tag{4.28}$$

Pri posmatranju kretanja sa ograničenjem, F_A i M_A će predstavljati reakcije ograničenja (reakcije veze). U praksi se uvodenje ograničenja najčešće svodi na kontakt hvataljke sa nepomičnom podlogom (stacionarno ograničenje) ili pak na kontakt sa nekim tijelom koje se kreće po zadatim zakonima i na čije kretanje robot ne utiče (nestacionarno ograničenje). Ipak, javljaju se i slučajevi kada dinamika robota utiče i na tijela sa kojima je robot u kontaktu (na primjer, dvoručna manipulacija). U svakom slučaju, dobija se struktura zatvorenog lanca.

Opšta metodologija uvodenja ograničenja

U poglavlju o kinematici uveden je vektor spoljašnjih koordinata koji, u slucaju n = 6, sadrži sledeće komponente.

$$X = [x_A y_A z_A \theta \varphi \psi]^T$$

Ovaj vektor povezan je sa unutrašnjim koordinatama preko Jakobijeve forme

$$\ddot{X} = J\ddot{q} + A$$

Ako uvedemo ograničenje na kretanje hvataljke tada će se smanjiti broj stepeni slobode. Neka je $\mathbf{n_r}$, ovaj smanjeni broj. Obično govorimo o redukovanom broju stepeni slobode hvataljke. Dakle, posmatramo ograničenje koje ukida $\mathbf{n_c}$ stepeni slobode pri čemu je $\mathbf{n_c = n - n_r}$. Za definisanje položaja hvataljke sada uvodimo $\mathbf{n_r}$ nezavisnih parametara $\boldsymbol{\eta_1, \ldots, \eta_{nr}}$, koji formiraju takozvani redukovani vektor položaja

$$X_r = [\eta_1 \ldots \eta_{nr}]$$

Najčešće se parametri uvode tako da određuju relativni položaj hvataljke u odnosu na uvedeno ograničenje. Vektor spoljašnjih koordinata **X** moguće je povezati sa redukovanim vektorom položaja **Xr** preko nove Jakobijeve forme

$$\ddot{X} = J_r \ddot{X}_r + A_r$$

gde je **Jr** takozvani redukovani jakobijan dimenzija **n x n$_r$** , pridružena matrica **Ar** je dimenzija **n x 1**. Matrice **Jr** i **Ar** izvode se iz relacija koje definišu postavljeno ograničenje.
Kombinovanjem navedenih izraza dobija se:

$$J_r \ddot{X}_r + A_r = J\ddot{q} + A$$

Ova relacija definiše kinematiku ograničenog kretanja.
Dinarniku ograničenog kretanja opisujemo modelom

$$H\ddot{q} + h = P + D_F F_A + D_M M_A$$

pri čemu F_A i M_A predstavljaju silu reakcije veze i reakcioni momenat. Model možemo napisati i kompaktnije:

$$H\ddot{q} + h = P + DR_A$$

gde je $R_A = \begin{bmatrix} F_A \\ M_A \end{bmatrix}$ šestokomponentni vektor reakcije, a $D = [D_F D_M]$

je dimenzija n x 6.

Komponente vektora reakcije $\mathbf{R_A}$ u opštem slučaju nijesu nezavisne, već u zavisnosti od tipa uvedenog ograničenja zadovoljavaju određene međusobne odnose koji se mogu izraziti relacijom

$$ER_A = 0$$

gde je E matrica dimenzija (6 — n + nr) x 6, koja se izvodi iz izraza koji definišu uvedeno ograničenje.
Sada navedene relacije definišu matematički model kinematike i dinamike ograničenog kretanja mehanizma robota.
Ako želimo kompaktniju formu modela zamjenom ćemo dobiti:

$$HJ^{-1}J_r\ddot{X}_r = P - h - HJ^{-1}(A_r - A) + DR_A$$

Sada ovu realizaciju, možemo napisati u obliku:

$$\begin{bmatrix} HJ^{-1}J_r & -D \\ 0 & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{X}_r \\ R_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -h - HJ^{-1}(A_r - A) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dobijeni model je dimenzije (nr + 6) x (nr + 6). Moguće je, međutim, napisati još kompaktniju formu. Šestokomponentni vektor reakcije R_A može se izraziti kao linearna funkcija $\mathbf{n_c}$ nezavisnih komponenti. Dakle, nezavisnih komponenti ima $\mathbf{n_c = n - n_r}$, odnosno onoliko koliko stepeni slobode je " ukinuto" uvodenjem ograničenja. Sada je

$$R_A = GR_{Ar}$$

gdje je $\mathbf{R_{Ar}}$ vektor dimenzije $\mathbf{n - n_r}$ koji sadrži nezavisne reakcije i koji nazivamo još redukovani vektor reakcije. Matrica G dimenzija (6 x (n — nr)) izvodi se polazeći od definicionih relacija ograničenja. Uvođenjem poslednje relacije dobija se dinamicki model

$$HJ^{-1}J_r\ddot{X}_r = P - h - HJ^{-1}(A_r - A) + DGR_{Ar}$$

odnosno

$$[HJ^{-1}J_r \quad -DG]\begin{bmatrix}\ddot{X}_r \\ R_{Ar}\end{bmatrix} = P - (h + HJ^{-1}(A_r - A))$$

Dimenzije blokova u ovom modelu su:

$$[(n \times n_r \ (n \times (n - n_r))]\begin{bmatrix} n_r \times 1 \\ (n - n_r) \times 1\end{bmatrix} = (n \times 1)$$

pa je model dimenzija (n x n).

Razmotrimo prvo rješavanje direktnog problema dinamike. Pod tim terminom ćemo ovdje podrazumijevati da je zadato kretanje **Xr(t)** i reakcije $\mathbf{R_{Ar}(t)}$ koje želimo ostvariti, a traže se odgovarajući pogoni u zglobovima **P(t)**. Ocigledno, **P** se izračunava direktno iz gornje jednačine.

Inverzni problem podrazumijeva integraciju modela. Zadati su pogoni **P(t)**, a traži se kretanje $\mathbf{X_r(t)}$ i reakcija $\mathbf{R_{Ar}(t)}$. Model omogućava rješavanje ubrzanja $\ddot{X}$ i reakcija $\mathbf{R_{Ar}}$, a time i integraciju modela.

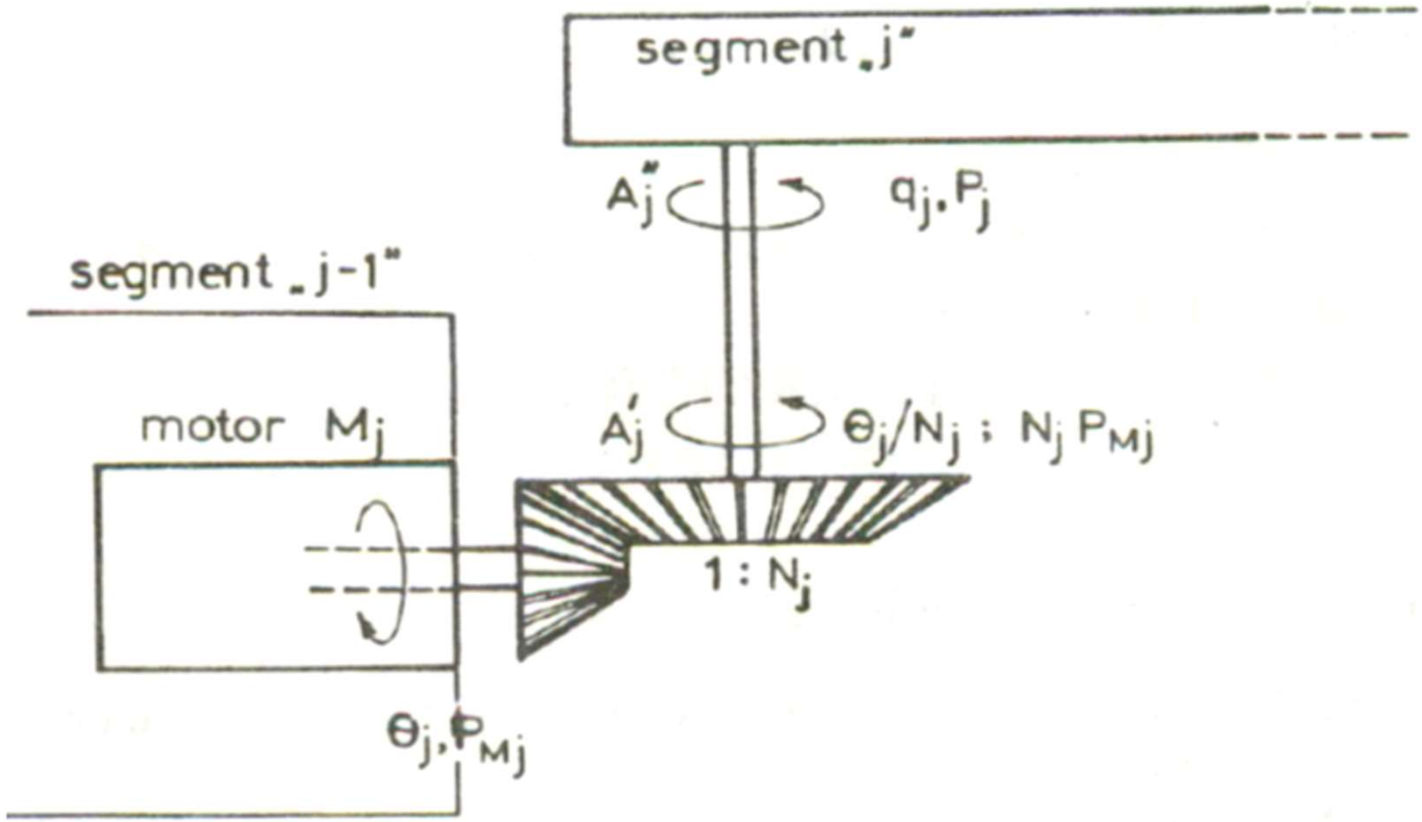
DINAMIKA ROBOTA SA ELASTIČNIM PRENOSOM POGONA

Ranije je govoreno o prenosu pogonskog momenta od motora do zgloba. Vidjeli smo da se često projektuje prilično složen prenosni sistem i da se često pogonski momenat prenosi na relativno veliku daljinu. Obično se radilo o prenosu osovinom ili lancem, a skoro uvijek je u prenosni sistem uključen reduktor. Pri pisanju relacija kojima opisujemo prenosni sistem smatralo se da je takav sistem nedeformabilan. Tako se došlo do relacija koje su korišćene i kasnije u dinamici. Dakle, obrtanje zgloba (**q_j**) direktno je sledilo iz obrtanja motora (**θj**). Međutim, prenosnİ sistem nikada ne može biti u potpunosti krut. Naime, uvijek postoje elastične deformacije, pa možemo reći da je relacija $P_j = N_j P_{Mj}$ aproksimativna i da važi tek za dovoljno krut prenos. Sada se postavlja pitanje šta znači "dovoljno krut" prenos. Mehanička krutost elemenata prenosnog sistema jeste velika i najčešće je aproksimacija opravdana. Međutim, u nekim preciznim proračunima deformacije u prenosu se moraju uzeti u obzir. Uzmimo na primjer deformaciju istezanja prenosnog lanca ili deformaciju uvijanja cjevastog dela harmonik—drajv reduktora.

Zato ovdje pokazujemo, na nešto uprošćenom primjeru, kako izgleda dinamički model robota sa elastičnim prenosnim sistemom. Na sličan način može se analizirati i prenos sa složenijom elastičnom deformacijom tj. sa više deformabilnih elemenata. Kako se radi i o dinamici motora i o dinamici mehanizma, to će dobijeni model predstavljati kompletni model dinamike.
U slučaju deformabilnog elastičnog prenosa modeli mehanizma i motora se ne mijenjaju. Mijenjaju se, medutim, relacije koje opisuju prenos. Neka je prenosni sistem takav kakav je prikazan na slici 4.13.i neka je jedini elastični elemenat osovina $A_j'A_j''$. Konstantu torzione krutosti označimo sa **kj,** a konstantu prigušenja sa **bj**.

Moment motora $\mathbf{P_{Mj}}$ predstavlja ulazni momenat za zupčast par. Nakon zupčastog para (zanemarujući njegovu inerciju) dobija se momenat $\mathbf{N_J P_{MJ}}$ koji se osovinom **Aj'Aj"** prenosi na zglob. Ako se zanemari inercija osovine onda je $\mathbf{Pj = N_J P_{MJ}}$ **.**

Uprošćeni sistem za prenos pogona



Međutim, usled elastične deformacije osovine A_j'A_j" koordinata obrtanja motora **θ_J** i koordinata obrtanja zgloba **q_J** postaju medusobno nezavisne. Time se broj generalisanih koordinata povećava za **n (θ_J, j= 1,...,n)**, a broj promjenljivih stanja za **2n (θ_J, $\dot{\theta}_J$, j= 1,...,n).**

Moment koji vrši elastičnu deformaciju može se napisati u obliku

$$P_j = N_j P_{Mj} = k_j(N_j \theta_j - q_j) + b_j(N_j \dot{\theta}_j - \dot{q}_j)$$

Sada model mehanizma postaje

$$H(q)\ddot{q} + h'(q, \dot{q}) = 0$$

gdje je

$$h' = h - P$$

$$P = column \left[k_j(N_j\theta_j - q_j) + b_j(N_j\theta_j - \dot{q}_j) \right]$$

Model motora postaje

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\theta_j\\ \dot{\theta}_j\\ i_j\end{bmatrix} = C_j\begin{bmatrix}\theta_j\\ \dot{\theta}_j\\ i_j\end{bmatrix} + f_j\{k_j(N_j\theta_j - q_j) + b_j(N_j\dot{\theta}_j - \dot{q}_j)\} + d_j u_j$$

Ukupan broj koordinata stanja je **5n** (**θ_J**, $\dot{\theta}_J$, i_j , **q_J**, $\dot{q}_J$, **j= 1,...,n**).